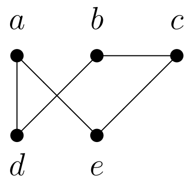
Graphen: Darstellungen, Isomorphie, Eckenfärbung

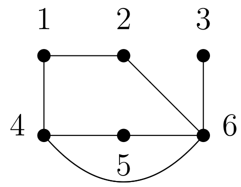
Aufgabe 1.
Zeichnen Sie die Graphen $G = (V, E)$ mit:

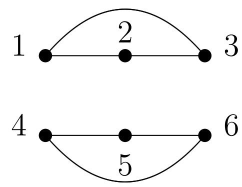
1. $V = \{a, b, c, d, e\}$,
   $E = \{\{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, e\}\}$,

2. $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,
   $E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}\}$.

Aufgabe 2.
Es sind die folgenden drei schlichten Graphen gegeben.





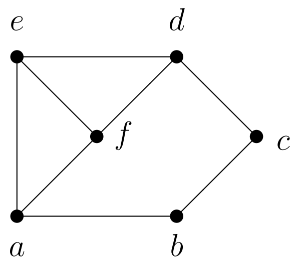


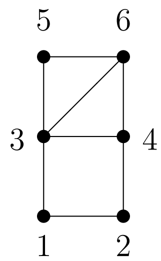
1. Schreiben Sie zu jedem Graphen die aufzählende Darstellung $G = (V, E)$ mit Eckenmenge V und Kantenmenge E auf.

2. Ein schlichter Graph $G = (V, E)$ mit n Ecken kann durch die zugehörige Adjazenzmatrix beschrieben werden: eine $(n \times n)$–Matrix $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = 1$, falls die Kante $\{v_i, v_j\}$ zur Kantenmenge E gehört und $a_{ij} = 0$ sonst.

   Geben Sie die Adjazenzmatrizen der Graphen an.

Aufgabe 3.
Sind die beiden folgenden Graphen isomorph? Geben Sie entweder einen Isomorphismus an, oder begründen Sie, warum keiner existiert.





Copyright © 2010 Prof. Dr. Hans-Rudolf Metz. All rights reserved.

Aufgabe 4.
Bei dem Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ mit $V_1 = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ sollen zwei Ecken genau dann durch eine Kante verbunden sein, wenn sie beide Primzahlen sind oder beide nicht Primzahlen sind. Bei dem Graphen $G_2 = (V_2, E_2)$ mit $V_2 = \{0, -1, -2, -3, -4, -5, -6\}$ sollen zwei Ecken genau dann durch eine Kante verbunden sein, wenn sie beide gerade oder beide ungerade sind. Gesucht ist ein Isomorphismus zwischen G_1 und G_2.

Aufgabe 5.
Existiert ein schlichter Graph mit fünf Ecken und den folgenden Eckengraden? Wenn ja, wie groß ist die Anzahl der Kanten? Falls möglich, zeichnen Sie einen Graphen mit den gegebenen Eigenschaften.

(a) 1, 2, 3, 4, 5 (b) 3, 3, 3, 3, 2 (c) 1, 2, 3, 4, 4
(d) 3, 4, 3, 4, 3 (e) 0, 1, 2, 2, 3 (f) 4, 3, 3, 2, 2

Aufgabe 6.
Gesucht sind die chromatischen Zahlen der Graphen C_n, K_n und W_n.

Aufgabe 7.
Angenommen, der Fachbereich MNI hat sechs Gremien, die in diesem Semester alle noch einmal tagen sollen. Wie viele verschiedene Sitzungstermine sind notwendig, damit kein Gremienmitglied zur gleichen Zeit zwei Verpflichtungen hat? Die Gremien sind:
$G_1 = \{\text{Henrich}, \text{Kügler}, \text{Letschert}\}$,
$G_2 = \{\text{Kaufmann}, \text{Kügler}, \text{Metz}, \text{Müller}, \text{Renz}\}$,
$G_3 = \{\text{Henrich}, \text{Jäger}, \text{Kneisel}, \text{Letschert}\}$,
$G_4 = \{\text{Kaufmann}, \text{Lauwerth}, \text{Letschert}, \text{Müller}, \text{Schneider}\}$,
$G_5 = \{\text{Henrich}, \text{Kügler}\}$,
$G_6 = \{\text{Jäger}, \text{Kaufmann}, \text{Kügler}, \text{Letschert}\}$.
Modellieren Sie die Problemstellung mit einem Graphen, und verwenden Sie Eckenfärbung zur Lösung.

Aufgabe 8.
In Nord-Amerika werden bestimmte Fernsehkanäle den Fernsehstationen so zugeteilt, daß niemals zwei Stationen, die weniger als 150 Meilen voneinander entfernt sind, denselben Kanal verwenden. Wieviele verschiedene Kanäle werden dann für die sechs Stationen benötigt, deren Entfernungen voneinander in der folgenden Tabelle gegeben sind?

	1	2	3	4	5	6
1	—	85	175	200	50	100
2	85	—	125	175	100	160
3	175	125	—	100	200	250
4	200	175	100	—	210	220
5	50	100	200	210	—	100
6	100	160	250	220	100	—