FH Gießen-Friedberg, Sommersemester 2010 — Lösungen zu Übungsblatt 10
Diskrete Mathematik (Informatik) — 16./18. Juni 2010
Prof. Dr. Hans-Rudolf Metz

Relationen: Äquivalenzrelationen, Ordnungsrelationen

Aufgabe 1.
Welche der folgenden Relationen auf der Menge $\{0, 1, 2, 3\}$ sind Äquivalenzrelationen? Welches sind in diesen Fällen die Äquivalenzklassen?

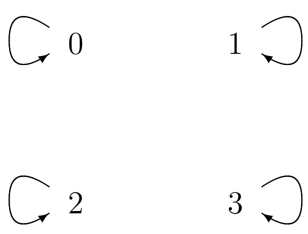
$$\begin{aligned}
R_1 &= \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}\\
R_2 &= \{(0,0),(0,2),(2,0),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}\\
R_3 &= \{(0,0),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}\\
R_4 &= \{(0,0),(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}\\
R_5 &= \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,2),(3,3)\}
\end{aligned}$$

Lösung: Eine Äquivalenzrelation ist eine Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

	reflexiv	symmetrisch	transitiv
R_1	ja	ja	ja
R_2	nein	ja	nein
R_3	ja	ja	ja
R_4	ja	ja	nein
R_5	ja	nein	nein

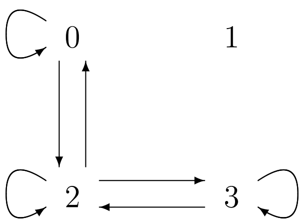
Bei einer Relation auf einer Menge mit wenig Elementen lassen sich die Eigenschaften leicht an dem Graphen ablesen.

R_1: Äquivalenzrelation.

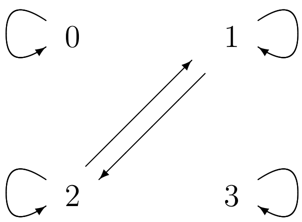


Äquivalenzklassen: $[0] = \{0\}$, $[1] = \{1\}$, $[2] = \{2\}$ und $[3] = \{3\}$.

R_2: Keine Äquivalenzrelation.

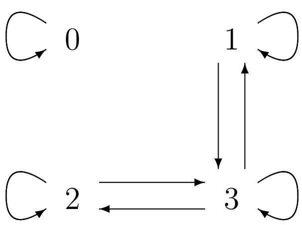


R_3: Äquivalenzrelation.

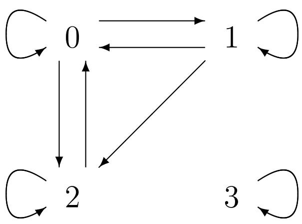


Äquivalenzklassen: $[0] = \{0\}$, $[1] = [2] = \{1, 2\}$ und $[3] = \{3\}$.

R_4: Keine Äquivalenzrelation.

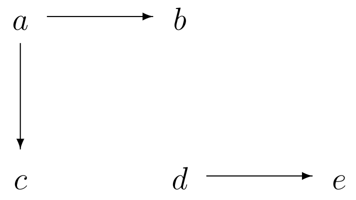


R_5: Keine Äquivalenzrelation.

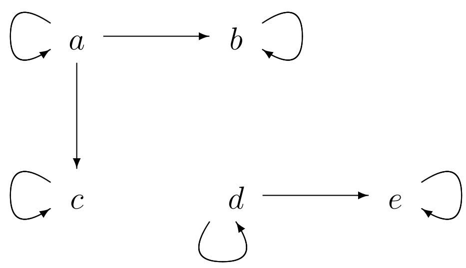


Aufgabe 2.
Gesucht ist die kleinste Äquivalenzrelation auf der Menge $\{a, b, c, d, e\}$, die die Relation $\{(a, b), (a, c), (d, e)\}$ enthält.

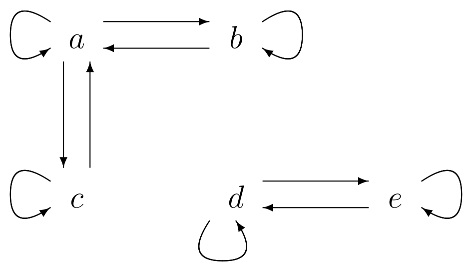
Lösung: Zunächst stellen wir den Graphen der Relation $R = \{(a,b),(a,c),(d,e)\}$ dar.



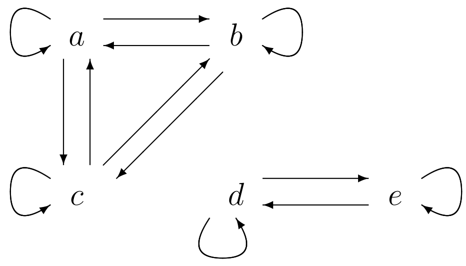
Die kleinste Äquivalenzrelation, die R umfaßt, muß aufgrund der Reflexivität Schlaufen an allen Ecken haben; also nehmen wir diese hinzu.



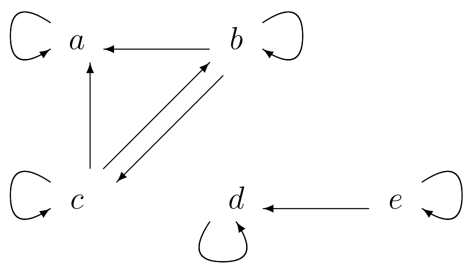
Da eine Äquivalenzrelation symmetrisch ist, müssen wir bei Ecken, die durch Pfeile verbunden sind, Pfeile in beiden Richtungen haben; also nehmen wir die entsprechenden Pfeile hinzu.



Damit wir schließlich auch noch Transitivität haben, muß $b\,R\,c$ und $c\,R\,b$ gelten. Damit bekommen wir den Graphen der kleinsten Äquivalenzrelation, die unsere ursprüngliche Relation R umfaßt.



Hinzugekommen sind also insgesamt die folgenden Pfeile:



Wenn wir die Paare aufschreiben, die zu R hinzukommen, erhalten wir als kleinste Äquivalenzrelation, die R enthält,

$$R \cup \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b),(e,d)\}.$$

Besser schreiben, so daß die einzelnen Schritte nachvollziehbar sind, kann man das mit

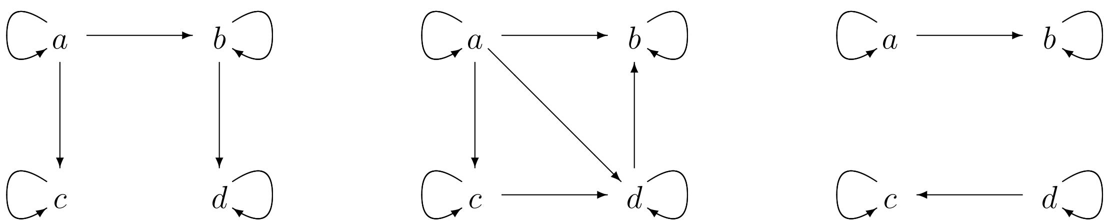
$$R \cup \Delta_R \cup R^{-1} \cup \{(b,c),(c,b)\},$$

wobei mit Δ_R die Diagonalrelation

$$\Delta_R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e)\}$$

gemeint ist.

Aufgabe 3.
Im folgenden sind drei Relationen durch ihre gerichteten Graphen gegeben. Stellen Sie fest, ob es sich um Ordnungen handelt. Sind diese partiell oder total?



Lösung: Eine Ordnung ist eine Relation, die reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

	reflexiv	antisymmetrisch	transitiv
linker Graph	ja	ja	nein
mittlerer Graph	ja	ja	nein
rechter Graph	ja	ja	ja

Nur der Graph rechts stellt eine Ordnung dar. Da es Elemente gibt, die nicht vergleichbar sind (zum Beispiel steht weder a in Relation zu c noch steht c in Relation zu a), ist es eine partielle Ordnung.

Aufgabe 4.
Auf jeder der folgenden Mengen ist durch die Teilbarkeitsrelation eine partielle Ordnung gegeben. Zeichnen Sie die zugehörigen Hasse-Diagramme.

(a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

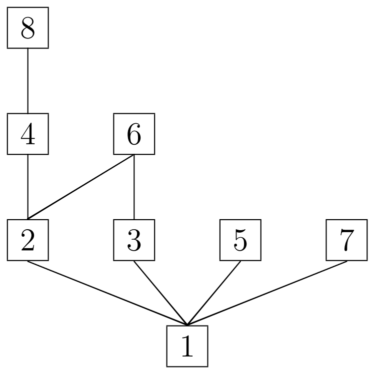
(b) $\{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

(c) $\{1, 2, 3, 6, 12, 24, 36, 48\}$

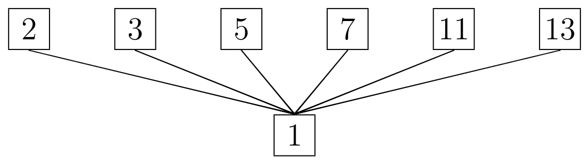
(d) $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$

Lösung:

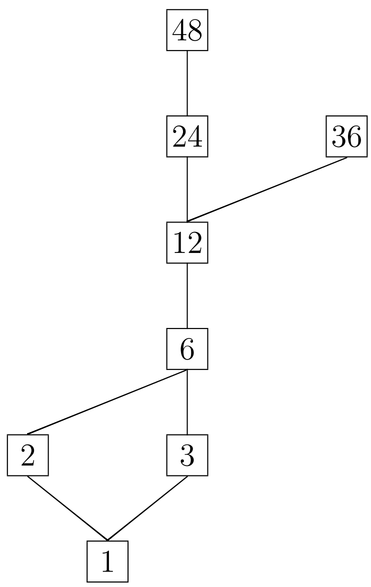
(a)



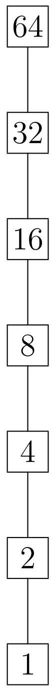
(b)



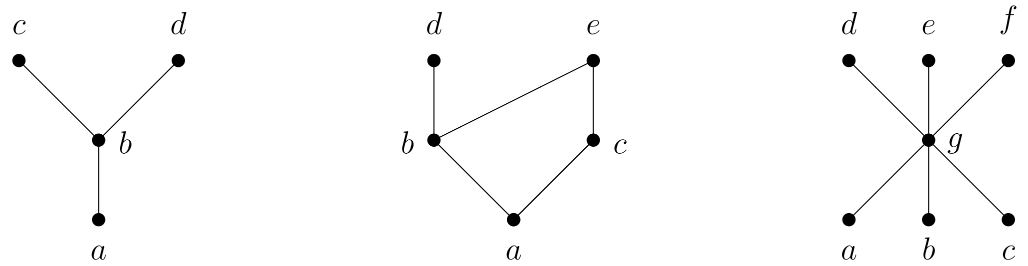
(c)



(d)



Aufgabe 5.
Zu den folgenden Hasse-Diagrammen sollen die zugehörigen partiellen Ordnungen als Mengen von geordneten Paaren angegeben werden.



Lösung:

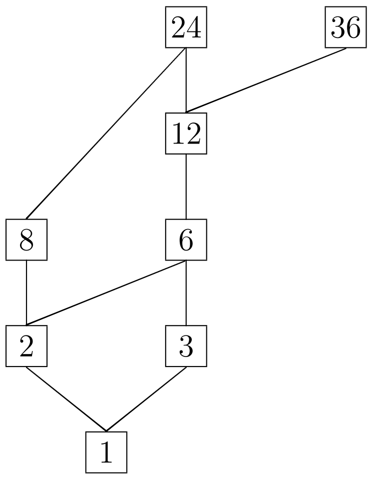
1. Linker Graph:
$$R = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(b,b),(b,c),(b,d),(c,c),(d,d)\}.$$

2. Mittlerer Graph:
$$R = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,b),(b,d),(b,e),(c,c),(c,e),\\ (d,d),(e,e)\}.$$

3. Rechter Graph:
$$R = \{(a,a),(a,d),(a,e),(a,f),(a,g),(b,b),(b,d),(b,e),(b,f),(b,g),\\ (c,c),(c,d),(c,e),(c,f),(c,g),(d,d),(e,e),(f,f),(g,d),(g,e),\\ (g,f),(g,g)\}.$$

Aufgabe 6.
Auf der Menge $\{1, 2, 3, 6, 8, 12, 24, 36\}$ ist durch die Teilbarkeitsrelation eine partielle Ordnung gegeben. Finden Sie eine dazu kompatible totale Ordnung.

Lösung: Zunächst wird das Hasse-Diagramm gezeichnet.



Topologisches Sortieren liefert eine totale Ordnung (von mehreren möglichen), zum Beispiel

$$1 \prec 2 \prec 8 \prec 3 \prec 6 \prec 12 \prec 24 \prec 36.$$

Aufgabe 7.
Es sei $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $R \subseteq A \times A$, d.h. R sei eine Relation auf der Menge der geordneten Paare von positiven ganzen Zahlen. Dabei sei $((a, b), (c, d)) \in R$ genau dann, wenn $ad = bc$ ist.

Zeigen Sie, daß R eine Äquivalenzrelation ist. Welche Elemente sind in der Äquivalenzklasse $[(1, 2)]$ enthalten? Wie kann man die Äquivalenzklassen von R interpretieren?

Lösung: Das Paar (a, b) steht genau dann in Relation zu dem Paar (c, d), wenn $ad = bc$ ist,

$$(a, b)\, R\, (c, d) \quad \Longleftrightarrow \quad ad = bc.$$

Damit eine Relation eine Äquivalenzrelation ist, muß sie reflexiv, symmetrisch und transitiv sein.

1. Reflexivität

   Zu zeigen: Für alle Paare (a, b) aus A gilt $(a, b)\, R\, (a, b)$.

   Es ist $(a, b)\, R\, (a, b) \Longleftrightarrow ab = ba$, und diese Gleichung gilt für beliebige a, $b \in \mathbb{N}$.

2. Symmetrie

   Zu zeigen: $(a, b)\, R\, (c, d) \Longleftrightarrow (c, d)\, R\, (a, b)$ für beliebige Paare (a, b) und (c, d) aus A.

Es gilt

$$(a,b)\,R\,(c,d) \iff ad = bc \iff cb = da \iff (c,d)\,R\,(a,b).$$

3. Transitivität

   Zu zeigen: $(a,b)\,R\,(c,d)$ und $(c,d)\,R\,(e,f)$ impliziert $(a,b)\,R\,(e,f)$ für beliebige Paare (a,b), (c,d) und (e,f) aus A.

   Es gilt

   $$\begin{aligned}(a,b)\,R\,(c,d) &\iff ad = bc,\\ (c,d)\,R\,(e,f) &\iff cf = de.\end{aligned}$$

   Durch Multiplikation folgt

   $$adcf = bcde.$$

   Wird diese Gleichung durch dc geteilt, ergibt sich

   $$af = be.$$

   Die Division ist zulässig, da $dc \neq 0$ ist, weil d und c natürliche Zahlen (also ungleich Null) sind.

   Nun ist aber

   $$af = be \iff (a,b)\,R\,(e,f),$$

   womit wir die Gültigkeit der Implikation hergeleitet haben.

Insgesamt haben wir damit gezeigt, daß R eine Äquivalenzrelation ist. Die Äquivalenzklasse $[(1,2)]$ besteht aus allen Paaren (a,b), die in Relation zu $(1,2)$ stehen. Wegen

$$\begin{aligned}(1,2)\,R\,(a,b) &\iff 1\cdot b = 2\cdot a\\ &\iff \frac{1}{2} = \frac{a}{b}\end{aligned}$$

sind dies alle Paare, die Zähler und Nenner eines Bruches bilden, der gleich $1/2$ ist. Die Äquivalenzklasse $[(1,2)]$ ist also

$$\begin{aligned}[(1,2)] &= \left\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{N} \text{ und } \frac{a}{b} = \frac{1}{2}\right\}\\ &= \{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8),\ldots\}.\end{aligned}$$

Wie kann man die Äquivalenzklassen von R allgemein interpretieren? Da

$$(x,y)\,R\,(a,b) \iff xb = ya \iff \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

gilt, ist die von (x,y) erzeugte Äquivalenzklasse gleich der Menge aller Paare (a,b), so daß die Brüche x/y und a/b den gleichen Wert haben, also

$$[(x,y)] = \left\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{N} \text{ und } \frac{a}{b} = \frac{x}{y}\right\}.$$

Zu jeder positiven rationalen Zahl r gibt es eine Äquivalenzklasse, in der alle Darstellungen von r (mit positivem Zähler und Nenner) enthalten sind. Die Darstellungen sind als Paare geschrieben. Umgekehrt gibt es zu jeder Äquivalenzklasse eine entsprechende positive rationale Zahl.

D.h. es gibt eine bijektive Abbildung zwischen der Menge der Äquivalenzklassen und der Menge der positiven rationalen Zahlen so, daß

$$[(a,b)] \longmapsto r \quad \Longleftrightarrow \quad r = \frac{a}{b}\,.$$

Definiert man Rechenoperationen auf der Menge der Äquivalenzklassen, kann man die rationalen Zahlen „konstruieren“ (Details siehe Literatur).