Relationen: Grundlegende Eigenschaften

Aufgabe 1.
Welche der folgenden Relationen R auf der Menge der Menschen ist reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch oder transitiv? Es sei $(x, y) \in R$ genau dann, wenn

(a) x ist größer als y,

(b) x und y wurden am selben Tag geboren,

(c) x hat denselben Vornamen wie y,

(d) x und y haben eine gemeinsame Großmutter.

Lösung: Von den Relationen sind

- reflexiv: (b), (c), (d),
- symmetrisch: (b), (c), (d),
- antisymmetrisch: (a),
- asymmetrisch: (a),
- transitiv: (a), (b), unklar bei (c).

Ob die Relation (c) transitiv ist, kann nicht klar gesagt werden, da es bei mehreren Vornamen einen Spielraum bei der Interpretation gibt. Sollen alle einzelnen Vornamen zusammen als ein „Gesamtvorname“ interpretiert werden?

Aufgabe 2.
Welche der folgenden Relationen auf der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ ist reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch oder transitiv? Schreiben Sie die Boolschen Matrizen der Relationen auf, und zeichnen Sie die gerichteten Graphen.

(a) $R_1 = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$

(b) $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

(c) $R_3 = \{(2, 4), (4, 2)\}$

(d) $R_4 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

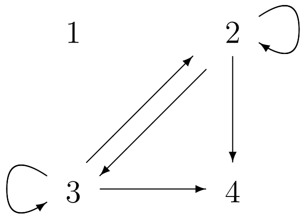
(e) $R_5 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

(f) $R_6 = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,1),(3,4)\}$

Lösung:

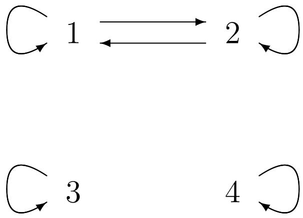
(a) Die Relation ist: nicht reflexiv, nicht symmetrisch, nicht antisymmetrisch, nicht asymmetrisch, transitiv.

	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	1	1	1
3	0	1	1	1
4	0	0	0	0



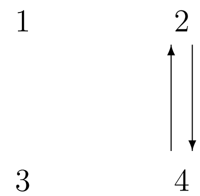
(b) Die Relation ist: reflexiv, symmetrisch, nicht antisymmetrisch, nicht asymmetrisch, transitiv.

	1	2	3	4
1	1	1	0	0
2	1	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1



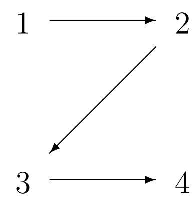
(c) Die Relation ist: nicht reflexiv, symmetrisch, nicht antisymmetrisch, nicht asymmetrisch, nicht transitiv (Schlingen bei 2 und 4 fehlen).

	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	0	0	1
3	0	0	0	0
4	0	1	0	0



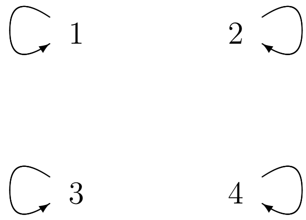
(d) Die Relation ist: nicht reflexiv, nicht symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch, nicht transitiv.

	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	0	0	1	0
3	0	0	0	1
4	0	0	0	0



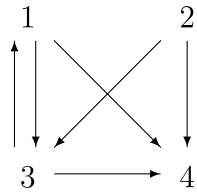
(e) Die Relation ist: reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, nicht asymmetrisch, transitiv. Wie uns dieses Beispiel zeigt, schließen sich Symmetrie und Antisymmetrie nicht gegenseitig aus!

	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1



(f) Die Relation ist: nicht reflexiv, nicht symmetrisch, nicht antisymmetrisch, nicht asymmetrisch, nicht transitiv ($2\,R\,3$ und $3\,R\,1$, aber nicht $2\,R\,1$).

	1	2	3	4
1	0	0	1	1
2	0	0	1	1
3	1	0	0	1
4	0	0	0	0



Aufgabe 3.
In der Vorlesung wurde hergeleitet, daß es auf einer endlichen Menge mit n Elementen genau 2^{n^2} voneinander verschiedene Relationen gibt.

(a) Ändern Sie die den Beweis ab, und finden Sie heraus, wieviele reflexive und wieviele symmetrische Relationen auf einer Menge mit n Elementen existieren.

(b) Wieviel Prozent aller Relationen auf einer Menge mit n Elementen sind reflexiv? Wie groß ist der Prozentsatz für $n = 1$, 2, 3 und 4? Wie groß ist er ungefähr, wenn $n = 100$ ist?

Lösung:

(a) Bei einer reflexiven Relation sind alle Elemente auf der Hauptdiagonalen der zugehörigen Boolschen Matrix gleich 1. Für die restlichen $n^2 - n$ Elemente gibt es keine Beschränkungen, jedes kann 0 oder 1 sein. Also gibt es

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n^2 - n \text{ Faktoren}} = 2^{n^2-n}$$

verschiedene Möglichkeiten für die Boolsche Matrix, d.h. es gibt

$$2^{n^2-n}$$

reflexive Relationen.

Bei einer symmetrischen Relation sind alle Elemente der Hauptdiagonalen und alle Elemente oberhalb (oder unterhalb) frei wählbar; die Symmetrie legt dann zwingend die Werte unterhalb (bzw. oberhalb) fest. Die Anzahl der frei wählbaren Elemente ist

$$n + (n^2 - n)/2 = \frac{2n + n^2 - n}{2} = \frac{n + n^2}{2} = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Dabei ist

$$
\begin{aligned}
n &: \text{ die Anzahl der Hauptdiagonalelemente,} \\
n^2 - n &: \text{ die Anzahl aller Matrixelemente mit Ausnahme der} \\
&\ \text{ Hauptdiagonalelemente,} \\
(n^2 - n)/2 &: \text{ die Anzahl aller Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen.}
\end{aligned}
$$

Man beachte, daß $n(n+1)/2$ immer eine ganze Zahl ist, entweder n oder $n+1$ ist gerade.

Also gibt es

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n(n+1)/2 \text{ Faktoren}} = 2^{n(n+1)/2}$$

symmetrische Relationen.

(b) Bei einer Menge mit n Elementen verhält sich die Anzahl reflexiver Relationen zur Anzahl aller Relationen wie

$$\frac{2^{n^2-n}}{2^{n^2}} = \frac{2^{n^2} \cdot 2^{-n}}{2^{n^2}} = 2^{-n} = \frac{1}{2^n}\,.$$

Also sind

$$\frac{1}{2^n} \cdot 100\%$$

aller Relationen reflexiv.

Für die speziellen Werte von n ergibt sich

$$
\begin{aligned}
n = 1 &: \ 50\% \\
n = 2 &: \ 25\% \\
n = 3 &: \ 12,5\% \\
n = 4 &: \ 6,25\% \\
n = 100 &: \ \frac{1}{2^{100}} = \left(\frac{1}{2^{10}}\right)^{10} \approx \left(10^{-3}\right)^{10} = 10^{-30} = 10^{-28}\,\%.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4.
(Warnung: Die Aufgabe ist sehr umfangreich! Sie muß nicht komplett bearbeitet werden.)
Stellen Sie fest, ob die folgenden Relationen auf der Menge der ganzen Zahlen reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch oder transitiv sind, wobei $(x, y) \in R$ genau dann, wenn

(a) $x \neq y$,

(b) $xy \geq 1$,

(c) $x = y + 1$ oder $x = y - 1$,

(d) $x \equiv y \bmod 7$,

(e) x ist ein Vielfaches von y,

(f) x und y sind beide negativ oder beide nichtnegativ,

(g) $x = y^2$,

(h) $x \geq y^2$.

Lösung: Von den Relationen sind

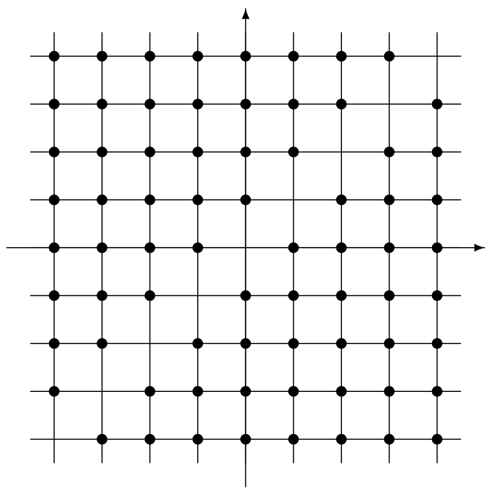
- reflexiv: (d), (e), (f),
- symmetrisch: (a), (b), (c), (d), (f),
- antisymmetrisch: (g), (h),
- asymmetrisch: keine,
- transitiv: (b), (d), (e), (f), (h).

Eine Relation auf der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist eine Teilmenge des kartesischen Produktes $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und kann ausschnittsweise dargestellt werden, indem in der Ebene von den Punkten mit ganzzahligen Koordinaten diejenigen markiert werden, die zur Relation gehören. Wir werden einen Ausschnitt betrachten, der den Ursprung des Koordinatensystems enthält. Bei unseren Beispielen wird durch diese Veranschaulichung klar werden, ob Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie oder Asymmetrie vorliegt. Lediglich die Transitivität ist nicht erkennbar.

Wenn im folgenden von *der Diagonalen* die Rede ist, so meinen wir die Diagonale im ersten und dritten Quadranten.

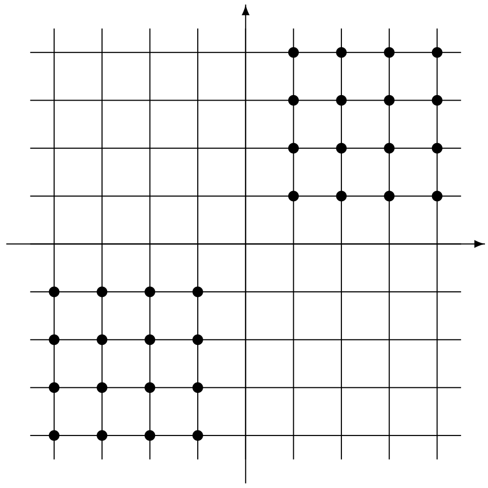
(a) $(x, y) \in R \;\Leftrightarrow\; x \neq y$

- nicht reflexiv: zum Beispiel $(1, 1) \notin R$, da nicht $1 \neq 1$ gilt. Die Punkte auf der Diagonalen gehören nicht zur Relation.
- symmetrisch: ist $x \neq y$, dann ist auch $y \neq x$. Die Punkte liegen symmetrisch zur Diagonalen.
- nicht antisymmetrisch: es gilt zum Beispiel sowohl $3\,R\,1$ als auch $1\,R\,3$, aber es ist $1 \neq 3$. Es gibt Punkte, die symmetrisch zur Diagonalen liegen, und beide zur Relation gehören.
- nicht asymmetrisch: zum Beispiel gilt sowohl $3\,R\,1$ als auch $1\,R\,3$. Es gibt Punkte, die symmetrisch zur Diagonalen liegen, und beide zur Relation gehören.
- nicht transitiv: es gilt $3\,R\,7$ und $7\,R\,3$, aber aus $3 \neq 7$ und $7 \neq 3$ folgt nicht $3 \neq 3$.



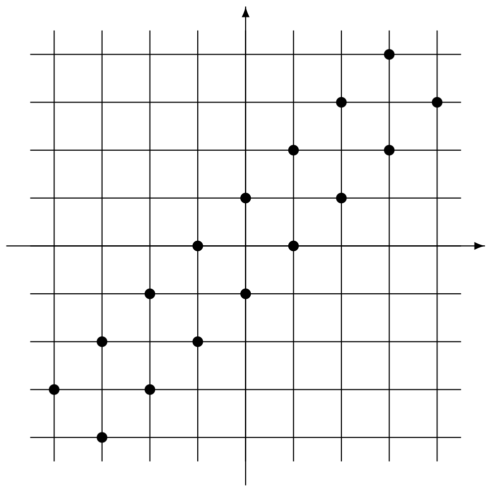
(b) $(x, y) \in R \;\Leftrightarrow\; xy \geq 1$

- nicht reflexiv: denn es gilt $(0, 0) \notin R$, da $0 \cdot 0 = 0 < 1$ ist. Die Diagonale gehört nicht vollständig zur Relation, der Ursprung fehlt.
- symmetrisch: ist $x \cdot y \geq 1$, dann ist auch $y \cdot x \geq 1$. Die Punkte liegen symmetrisch zur Diagonalen.
- nicht antisymmetrisch: es gilt zum Beispiel sowohl $3\,R\,1$ als auch $1\,R\,3$, aber es ist $1 \neq 3$. Es gibt Punkte, die symmetrisch zur Diagonalen liegen, und beide zur Relation gehören.
- nicht asymmetrisch: zum Beispiel gilt $1\,R\,1$. Es gibt Punkte auf der Diagonalen, die zur Relation gehören.
- transitiv: aus $xy \geq 1$ folgt $x, y \geq 1$ oder $x, y \leq -1$. Somit folgt aus $xy \geq 1$ und $yz \geq 1$, daß $x, y, z \geq 1$ oder $x, y, z \leq -1$ gilt, also folgt $xz \geq 1$.



(c) $(x, y) \in R \;\Leftrightarrow\; x = y + 1$ oder $x = y - 1$

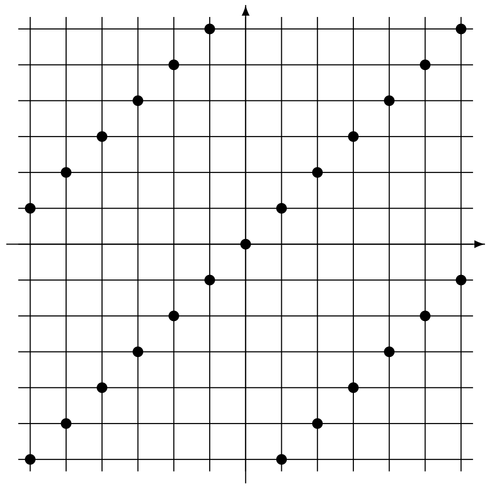
- nicht reflexiv: wenn x und y übereinstimmen, kann keine der beiden Gleichungen gelten. Die Punkte auf der Diagonalen gehören nicht zur Relation.
- symmetrisch: $x = y + 1$ und $x = y - 1$ gehen durch Vertauschung von x und y ineinander über. Die Punkte liegen symmetrisch zur Diagonalen.
- nicht antisymmetrisch: es gilt zum Beispiel sowohl $2\,R\,1$ als auch $1\,R\,2$, aber es ist $1 \neq 2$. Es gibt Punkte, die symmetrisch zur Diagonalen liegen, und beide zur Relation gehören.
- nicht asymmetrisch: zum Beispiel gilt sowohl $2\,R\,1$ als auch $1\,R\,2$. Es gibt Punkte, die symmetrisch zur Diagonalen liegen, und beide zur Relation gehören.
- nicht transitiv: es gilt $1\,R\,2$ und $2\,R\,1$, aber nicht $1\,R\,1$.



(d) $(x, y) \in R \;\Leftrightarrow\; x \equiv y \bmod 7$

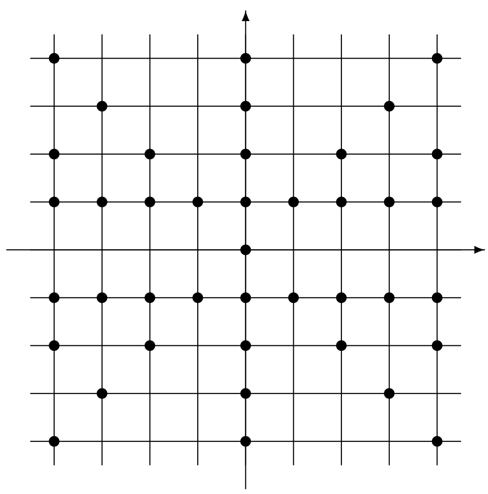
- reflexiv: $(x, x) \in R$, denn 7 teilt $x - x = 0$. Alle Punkte auf der Diagonalen gehören zur Relation.
- symmetrisch: wenn 7 die Differenz $x - y$ teilt, dann teilt 7 auch $y - x$. Die Punkte liegen symmetrisch zur Diagonalen.
- nicht antisymmetrisch: es gilt zum Beispiel sowohl $1\,R\,(-6)$ als auch $(-6)\,R\,1$, aber es ist $1 \neq -6$. Es gibt Punkte, die symmetrisch zur Diagonalen liegen, und beide zur Relation gehören.
- nicht asymmetrisch: zum Bsp. gilt $1\,R\,1$. Punkte auf der Diagonalen gehören zur Relation.
- transitiv:

$7 \mid (x - y) \Rightarrow n \cdot 7 = x - y$ und $7 \mid (y - z) \Rightarrow m \cdot 7 = y - z$. Addition liefert $(n+m)7 = x - z$, d.h. 7 teilt $x - z$.



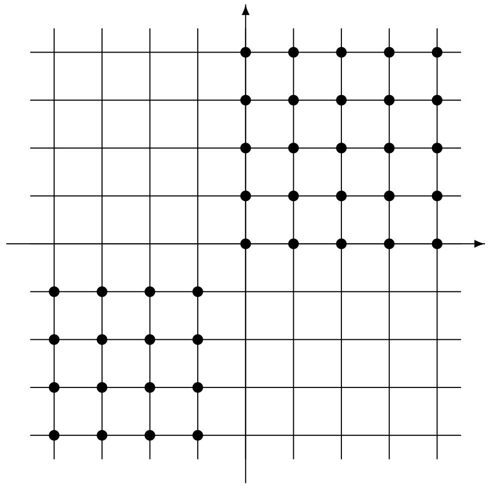
(e) $(x, y) \in R \;\Leftrightarrow\; x$ ist ein Vielfaches von y

- reflexiv: denn x ist ein Vielfaches von x, da $x = 1 \cdot x$. Alle Punkte auf der Diagonalen gehören zur Relation.
- nicht symmetrisch: $x = 3$ ist ein Vielfaches von $y = 1$, aber $x = 1$ ist nicht ein Vielfaches von $y = 3$. Die Punkte liegen nicht symmetrisch zur Diagonalen.
- nicht antisymmetrisch: es gilt zum Beispiel sowohl $1\,R\,(-1)$ als auch $(-1)\,R\,1$, aber es ist $1 \neq (-1)$. Es gibt Punkte, die symmetrisch zur Diagonalen liegen, und beide zur Relation gehören.
- nicht asymmetrisch: zum Beispiel gilt $1\,R\,1$. Es gibt Punkte auf der Diagonalen, die zur Relation gehören.
- transitiv: $x\,R\,y$ und $y\,R\,z$ bedeutet, daß y ein Vielfaches von z und x ein Vielfaches von y ist. Dann ist auch x ein Vielfaches von z, d.h. $x\,R\,z$.



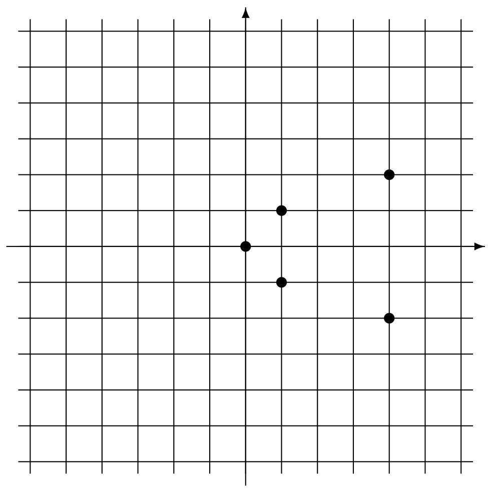
(f) $(x, y) \in R \;\Leftrightarrow\; x$ und y sind beide negativ oder beide nichtnegativ

- reflexiv: $(x, x) \in R$, da x entweder negativ oder nichtnegativ ist. Alle Punkte auf der Diagonalen gehören zur Relation.
- symmetrisch: ist unmittelbar klar. Die Punkte liegen symmetrisch zur Diagonalen.
- nicht antisymmetrisch: es gilt zum Beispiel sowohl $3\,R\,1$ als auch $1\,R\,3$, aber es ist $1 \neq 3$. Es gibt Punkte, die symmetrisch zur Diagonalen liegen, und beide zur Relation gehören.
- nicht asymmetrisch: zum Bsp. gilt $1\,R\,1$. Punkte auf der Diagonalen gehören zur Relation.
- transitiv: aus $x\,R\,y$ und $y\,R\,z$ folgt entweder $x, y, z < 0$ oder $x, y, z \geq 0$. In beiden Fällen gilt $x\,R\,z$.



(g) $(x, y) \in R \;\Leftrightarrow\; x = y^2$

- nicht reflexiv: zum Beispiel $(2, 2) \notin R$, da $2 \neq 2^2$ ist. Nicht alle Punkte der Diagonalen gehören zur Relation.
- nicht symmetrisch: $4 = 2^2$, aber $2 \neq 4^2$. Die Punkte liegen nicht symmetrisch zur Diagonalen.
- antisymmetrisch: aus $x = y^2$ und $y = x^2$ folgt $x = x^4$, wegen $x = y^2 \geq 0$ also nur $x = y = 0$ oder $x = y = 1$. Es gibt keine Punkte, die symmetrisch zur Diagonalen liegen, und beide zur Relation gehören.
- nicht asymmetrisch: $0\,R\,0$ und $1\,R\,1$. Zwei Punkte der Diagonalen gehören zur Relation.
- nicht transitiv: es gilt $16\,R\,4$ und $4\,R\,2$, aber nicht $16\,R\,2$.



(h) $(x, y) \in R \;\Leftrightarrow\; x \geq y^2$

- nicht reflexiv: zum Beispiel $(2, 2) \notin R$, da $2 < 2^2$ ist. Nicht alle Punkte der Diagonalen gehören zur Relation.
- nicht symmetrisch: $4 \geq 2^2$, aber $2 < 4^2$. Die Punkte liegen nicht symmetrisch zur Diagonalen.
- antisymmetrisch: aus $x \geq y^2$ und $y \geq x^2$ folgt $x, y \geq 0$ und $x \geq x^4$, also $x = y = 0$ oder $x = y = 1$. Es gibt keine Punkte, die symmetrisch zur Diagonalen liegen, und beide zur Relation gehören.
- nicht asymmetrisch: $0\,R\,0$ und $1\,R\,1$. Zwei Punkte der Diagonalen gehören zur Relation.
- transitiv: aus $x \geq y^2$ und $y \geq z^2$ folgt $x \geq z^4$, also gilt erst recht $x \geq z^2$. D.h. $x\,R\,y$ und $y\,R\,z$ impliziert $x\,R\,z$.