Kombinatorik

Aufgabe 1.
Berechnen Sie

(a) $\dfrac{(n-1)!\,(n+1)!}{(n!)^2}$,

(b) $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} \qquad (0 \le k \le n),$

(c) $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} \qquad (0 \le k \le n-1).$

Lösung: Die Aufgabe wird durch algebraische Umformungen gelöst. Dabei werden die Definitionen von Fakultät und Binomialkoeffizient verwendet.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)!\,(n+1)!}{(n!)^2} &= \frac{(n-1)!}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \\ &= \frac{1}{n} \cdot (n+1) = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}\,. \end{aligned}$$

Im Rechenschritt von der ersten zur zweiten Zeile wird gekürzt. Dabei wird verwendet, daß $n! = (n-1)! \cdot n$ und $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$ ist, was unmittelbar aus der Definition der Fakultät folgt.

Die Umformungen innerhalb der ersten und der zweiten Zeile sind einfache Bruchrechnung.

(b) Ausschreiben der Binomialkoeffizienten, Division durch einen Bruch als Multiplikation mit dem Kehrbruch schreiben, sowie anschließendes Kürzen unter Beachtung der Eigenschaften der Fakultät gibt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} &= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} : \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\,k!} \\ &= \frac{n!\,(n+1-k)!\,k!}{(n-k)!\,k!\,(n+1)!} \\ &= \frac{n+1-k}{n+1} = 1 - \frac{k}{n+1}\,. \end{aligned}$$

(c) Analog zum vorherigen Teil der Aufgabe folgt durch Umschreiben und algebraische Umformungen

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} : \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} : \frac{n!}{(n-k-1)!\,(k+1)!} \\ &= \frac{n!\,(n-k-1)!\,(k+1)!}{(n-k)!\,k!\,n!} \\ &= \frac{k+1}{n-k}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 2.
Vier verschiedene Mathematikbücher, sechs verschiedene Informatikbücher und zwei verschiedene Physikbücher sollen auf einem Regal angeordnet werden. Wie viele verschiedene Anordnungen sind möglich, wenn

(a) die Bücher aus einem Fachgebiet alle zusammenstehen sollen;

(b) nur die Mathematikbücher zusammenstehen sollen?

Lösung:

(a) Die Anzahl der Permutationen (Anordnungsmöglichkeiten) für die vier Mathematikbücher ist 4!. Entsprechend gibt es für die Informatikbücher 6! Permutationen und für die Physikbücher 2!. Nun können aber auch die drei Büchergruppen untereinander vertauscht werden, d. h. es können zum Beispiel alle Mathematikbücher am Anfang stehen, dann kommen die Informatik- und dann die Physikbücher; oder aber die Informatikbücher stehen am Anfang u.s.w. Die Anzahl der Permutationen für die drei Büchergruppen beträgt 3!.

Insgesamt erhält man

$$4! \cdot 6! \cdot 2! \cdot 3! = 24 \cdot 720 \cdot 2 \cdot 6 = 207360$$

Möglichkeiten der Anordnung.

(b) Die vier Mathematikbücher können auf 4! Arten angeordnet werden. Die Informatik- und Physikbücher können in beliebiger Reihenfolge stehen. Aber auch die Gruppe der vier Mathematikbücher kann an unterschiedlichen Positionen sein: sie kann am Anfang vor allen Informatik- und Physikbüchern kommen, es kann ein Informatikbuch vor der Gruppe der vier Mathematikbücher stehen, zwei Informatikbücher können vor der Gruppe stehen u.s.w.

Wir haben also neun Objekte, die unterschiedlich angeordnet werden können: acht Bücher (sechs zur Informatik, zwei zur Physik) und eine Büchergruppe. Neun Objeklte kann man aber auf 9! Arten anordnen.

Insgesamt ergeben sich

$$4! \cdot 9! = 24 \cdot 362880 = 8709120$$

Möglichkeiten der Anordnung.

Aufgabe 3.
Es nehmen 600 Personen mit jeweils einem Los an einer Lotterie teil, bei der drei Preise ausgespielt werden: 1000 Euro, 500 Euro und 100 Euro. Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es für den Ausgang der Verlosung?

Lösung: Hier haben wir eine Aufgabe vom Typ „3 aus 600“, denn es soll natürlich ausgeschlossen werden, daß eine Person zwei oder gar alle drei Preise bekommt. Bei der Ziehung der drei Preisträger spielt die Reihenfolge eine Rolle, da sich die drei Preise unterscheiden. Also geht es darum, „3 aus 600 mit Berücksichtigung der Reihenfolge“ zu bestimmen. Das ist eine Variation ohne Wiederholung. Es ergibt sich

$$v(600, 3) = \frac{600!}{(600-3)!} = 600 \cdot 599 \cdot 598 = 214921200.$$

Zunächst hat man 600 Möglichkeiten (Personen, die gezogen werden können). Nachdem Person 1 bestimmt ist, hat man noch 599 Möglichkeiten. Schließlich bleiben noch 598 Möglichkeiten für die letzte Ziehung. Die Gesamtzahl der Möglichkeiten ist das Produkt der drei Zahlen.

Arbeitet man mit der Formel

$$v(600, 3) = \frac{600!}{(600-3)!} = \frac{600!}{(597)!},$$

so kommt man ohne Umformung, d.h. ohne Kürzen, nicht weiter, da die Fakultäten zu groß für Taschenrechner sind. (Gute Mathematik-Software wertet solche Ausdrücke richtig aus. Testen Sie das bei Gelegenheit.)

Aufgabe 4.
Ein Computersystem sei durch ein Passwort geschützt, das aus 8 Zeichen besteht.

(a) Jedes Zeichen kann einer der 26 Buchstaben oder eine der 10 Ziffern sein. Wie viele Passwörter sind möglich?

(b) Jedes Zeichen kann einer der 26 Buchstaben oder eine der 10 Ziffern sein, wobei unter den 8 Zeichen mindestens eine Ziffer und mindestens ein Buchstabe vorkommen muß. Wie viele Passwörter sind möglich?

(c) Um wieviel Prozent reduziert sich die Anzahl der Passwörter in (b) gegenüber denen, die in (a) möglich sind?

Hinweis: Es wird nicht zwischen Groß- und Kleinbuchstaben unterschieden.

Lösung: Es stehen 36 unterschiedliche Zeichen zur Verfügung.

(a) Aus den 36 Zeichen werden 8 ausgewählt, wobei es keinerlei Einschränkungen gibt. Ein Zeichen kann also mehrfach vorkommen. Da die Reihenfolge eine Rolle spielt, haben wir eine Variation mit Wiederholung, so daß

$$\underbrace{36 \cdot \ldots \cdot 36}_{\text{8 Faktoren}} = 36^8 \approx 2,82 \cdot 10^{12}$$

Passwörter möglich sind.

(b) Hier gibt es einen geschickten kurzen Lösungsweg, bei dem man mit der Anzahl der nicht erlaubten Wörter arbeitet. Versucht man die erlaubten Wörter zu zählen, kommt man erst nach einer längeren Überlegung zum Ziel.

1. Weg: Erlaubt sind alle Passwörter aus Teil (a) ohne diejenigen, bei denen nur Buchstaben vorkommen (das sind 26^8) und ohne diejenigen, bei denen nur Zahlen vorkommen (das sind 10^8). Also sind

$$36^8 - 26^8 - 10^8 \approx 2,61 \cdot 10^{12}$$

Passwörter zulässig.

2. Weg: Die Anzahl der Buchstaben in einem Passwort ist mindestens 1 und höchstens 7.

Passwörter mit genau einem Buchstaben: Für den Buchstaben gibt es 26 Möglichkeiten. Für die sieben Ziffern gibt es 10^7 Möglichkeiten. Ferner ist noch zu unterscheiden, an welcher Stelle der Buchstabe steht. Es gibt $26 \cdot 10^7$ Passwörter, bei denen der Buchstabe an der 1. Position ist, ebenso $26 \cdot 10^7$ Passwörter mit dem Buchstaben an der 2. Position u.s.w. Also gibt es insgesamt $8 \cdot 26 \cdot 10^7$ Passwörter mit genau einem Buchstaben.

Passwörter mit genau zwei Buchstaben: Für die beiden Buchstaben gibt es 26^2 und für die sechs Ziffern 10^6 Möglichkeiten. Aber wieviele unterschiedliche Fälle gibt es aufgrund der verschiedenen Positionen der beiden Buchstaben? Hier hilft eine Überlegung analog zum Zahlenlotto; wir ziehen 2 aus 8 Positionen ohne Berücksichtigung der Ziehungsreihenfolge und ohne Wiederholung der Position. Der Binomialkoeffizient

$$\binom{8}{2}$$

liefert die Anzahl der möglichen Ziehungen bzw. der möglichen Buchstabenpositionen. Es gibt somit

$$\binom{8}{2} 26^2\, 10^6$$

Passwörter mit genau zwei Buchstaben.

Entsprechend überlegt man sich, daß es

$$\binom{8}{3} 26^3\, 10^5$$

Passwörter mit genau drei Buchstaben gibt u.s.w.

Addiert man alle erlaubten Fälle, so ergibt sich als Gesamtzahl der erlaubten

Passwörter

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{7} \binom{8}{k} 26^k \, 10^{8-k} && (1) \\ = \; & \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} 26^k \, 10^{8-k} - \binom{8}{0} 26^0 \, 10^8 - \binom{8}{8} 26^8 \, 10^0 && (2) \\ = \; & (26+10)^8 - 10^8 - 26^8 && (3) \\ = \; & 36^8 - 10^8 - 26^8. && (4) \end{aligned}$$

In (1) werden die Fälle „genau ein Buchstabe", ..., „genau sieben Buchstaben" addiert. In (2) wird statt von $k = 1$ von $k = 0$ an summiert; damit die Gleichung stimmt, wird der Summand für $k = 0$ nach der Summation subtrahiert. Entsprechend für $k = 8$. Auf den Ausdruck (3) kommt man ausgehend von (2) mit der binomischen Formel. In (4) erhält man dann das selbe Ergebnis wie bei dem ersten Rechenweg.

(c) Aus der Gleichung

$$\frac{2,61 \cdot 10^{12}}{2,82 \cdot 10^{12}} = \frac{x}{100}$$

folgt

$$x = \frac{261}{2,82} \approx 92,6.$$

Die Anzahl der Passwörter reduziert sich um circa $7,4\%$.

Aufgabe 5.
In einer Klausur wird eine Multiple-Choice-Aufgabe mit 6 Antwortmöglichkeiten gestellt. Wieviel unterscheidbare Möglichkeiten gibt es, 3 Antworten anzukreuzen?

Lösung: In welcher Reihenfolge die Antworten angekreuzt werden spielt keine Rolle und ist ja auch gar nicht feststellbar. Also haben wir eine Aufgabe vom Typ „3 aus 6 ohne Berücksichtigung der Reihenfolge". Das entspricht der Situation beim Zahlenlotto 6 aus 49 und ist eine Kombination (die Reihenfolge ist egal) ohne Wiederholung (keine Antwort wird mehrfach angekreuzt). Es ergeben sich

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)!\,3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$$

Möglichkeiten.

Aufgabe 6.
Ein portables Gerät zur Messung von Luftschadstoffen kann mit bis zu vier Zusatzmodulen (Drucker für Meßwerteprotokoll, Positionsbestimmung über Satelliten, Datenübertragung per Funk, Statistik-Software) ausgerüstet werden, die unabhängig voneinander eingebaut werden können, d.h. beliebig miteinander kombinierbar sind. Wieviele verschiedene Ausstattungsvarianten gibt es (einschließlich der Basisversion ohne Zusatzmodule)?

Lösung: Wir betrachten zwei Lösungswege.

1. Weg: Aus den vier Zusatzmodulen kann entweder keines, oder genau eines, oder genau zwei, oder genau drei oder genau vier ausgewählt und eingebaut werden. Also werden aus 4 unterschiedlichen Elementen k herausgegriffen, wobei die Reihenfolge keine Rolle spielt, da es egal ist, welches Zusatzgerät zuerst und welches danach eingebaut wird.

Wir haben also eine Situation entsprechend dem Zahlenlotto, wir ziehen statt 6 aus 49 jetzt k aus 4. Es handelt sich um Kombinationen ohne Wiederholung; die Anzahl der Möglichkeiten wird mit Binomialkoeffizienten berechnet. Wollen wir z. B. zwei Zusatzmodule einbauen, so ist die Anzahl unserer Wahlmöglichkeiten gleich dem Wert des Binomialkoeffizienten

$$\binom{4}{2}.$$

Die Gesamtzahl der Ausstattungsvarianten ist die Summe der Möglichkeiten bei keinem Zusatzmodul, genau einem Zusatzmodul u.s.w., also

$$\underbrace{\binom{4}{0}}_{\text{Grundgerät}} + \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{ein Zusatzmodul}} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1+4+6+4+1 = 16.$$

2. Weg: Für jedes der Zusatzmodule gibt es zwei Möglichkeiten: entweder es ist eingebaut oder es ist nicht eingebaut. Die Anzahl der Ausstattungsvarianten ist damit

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16.$$

Man könnte den „Ausstattungszustand“ eines Gerätes auch mit einer Zeichenkette aus vier Bits beschreiben: ein Bit ist gesetzt, wenn das entsprechende Modul vorhanden ist. Zum Beispiel würde dann die Zeichenkette $(1, 0, 1, 1)$ bedeuten, daß die Module 1, 3 und 4 vorhanden sind und Modul 2 fehlt. Bei 4 Bits gibt es aber $2^4 = 16$ Kodierungsmöglichkeiten, also gibt es 16 Konfigurationen für das Meßgerät.

Aufgabe 7.

In einer Cafeteria kann man 5 verschiedene Sorten von belegten Brötchen bekommen, von jeder Sorte sind 6 Stück vorhanden. Ein Student will für eine Arbeitsgruppe, die sich auf eine Mathematikprüfung vorbereitet, 3 belegte Brötchen kaufen. Dabei ist es egal, welche Sorten er nimmt, und in welcher Reihenfolge die Brötchen eingepackt werden. Wieviele verschiedene Zusammenstellungen sind möglich?

Lösung: Da die Reihenfolge egal ist, handelt es sich um eine Kombination. Weil es außerdem keine Rolle spielt, welche Sorten von Brötchen genommen werden, darf eine Sorte auch mehrfach vorkommen, d.h. Wiederholung ist erlaubt.

Wir haben also eine Kombination mit Wiederholung. Da 3 Brötchen aus 5 Sorten herausgegriffen werden, ist es eine Kombination dritter Ordnung von fünf Elementen mit Wiederholung.

Somit müssen wir die Formel

$$c^*(n,k) = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

mit $k = 3$ und $n = 5$ verwenden. Der erste Binomialkoeffizient liefert

$$c^*(5,3) = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

Das selbe Ergebnis muß auch der zweite Binomialkoeffizient liefern; die Berechnung ist deshalb eigentlich überflüssig, wird der Deutlichkeit halber aber trotzdem noch zusätzlich angegeben:

$$c^*(5,3) = \binom{5+3-1}{5-1} = \binom{7}{4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35.$$

Also gibt es für den Einkauf der Brötchen insgesamt 35 verschiedene Zusammenstellungen.

Um die Situation zusätzlich zu veranschaulichen, verwenden wir ein Bild, das auch bei der Herleitung der allgemeinen Formel die zentrale Rolle spielt.

Es gibt fünf Sorten von Brötchen. Wir stellen uns vor, daß diese in fünf Fächern nebeneinander liegen, so daß wir zwischen den Fächern vier Abtrennungen brauchen.

$$\ldots | \ldots | \ldots | \ldots | \ldots$$

Die drei Brötchen, die wir herausgreifen, kennzeichnen wir durch drei Sterne, zum Beispiel

$$|\ * \ * \ | \qquad |\ * \ |$$

oder

$$* \ | \qquad | \ * \ | \ * \ |$$

oder auf eine andere Art, und wir fragen: Wieviele solcher Möglichkeiten gibt es?

Die beiden Bilder legen die Antwort nahe: Es gibt soviele Möglichkeiten, wie es Anordnungen der vier Striche und drei Sterne gibt.

Stellen wir uns sieben Plätze vor, auf die wir die Striche und Sterne verteilen. Dann ist klar, daß es reicht, die Plätze für die Striche festzulegen; der Rest sind dann automatisch die Plätze für die Sterne. Wir müssen also vier aus sieben ohne Wiederholung herausgreifen. Oder wir legen die Plätze für die Sterne fest und müssen drei aus sieben ohne Wiederholung herausgreifen. Beides liefert das selbe Ergebnis

$$\binom{7}{4} = \binom{7}{3} = 35.$$

Aufgabe 8.

In einem Gerät sind versehentlich 8 Steckverbindungen geöffnet worden, wodurch 5 rote und 3 blaue Drähte unterbrochen sind. Jeder der 8 Drähte hat eine spezielle Funktion, d.h. jeder Stecker gehört eindeutig in eine der Buchsen, wobei zu einem roten Stecker eine der roten Buchsen und zu einem blauen Stecker eine der blauen Buchsen gehört.

Wieviel Möglichkeiten gibt es, die 8 Steckverbindungen zu schließen, wenn nur die farbliche Zusammengehörigkeit eingehalten wird?

Lösung: Wir ordnen die Buchsen in einer beliebigen Reihenfolge an und halten diese dann fest. Stellen Sie sich zum Beispiel vor, daß Sie die Drähte nebeneinanderlegen, links die roten und rechts die blauen.

$$\underbrace{1 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 5}_{\text{rot}} \qquad \underbrace{6 \quad 7 \quad 8}_{\text{blau}}$$

Sind die Buchsen in einer festen Reihenfolge, dann reduziert sich die Aufgabe auf das Durchprobieren aller Permutationen (Möglichkeiten der Anordnung) der roten Stecker und aller Permutationen der blauen Stecker, wobei jede rote Permutation mit jeder blauen kombiniert werden kann.

Für die 5 roten Stecker gibt es 5! Permutationen, für die blauen 3!. Insgesamt haben wir damit

$$5! \cdot 3! = 120 \cdot 6 = 720$$

Möglichkeiten.

Aufgabe 9.
Ein DNA-Strang besteht aus hintereinander aufgereihten Nukleotidmolekülen. Es gibt vier verschiedene Nukleotide. Wieviel verschiedene DNA-Stränge der Länge 260 sind möglich? Stellen Sie das Ergebnis in der Zehnerpotenz-Schreibweise dar.

Lösung: Bei einem DNA-Strang ist die Reihenfolge der Nukleotidmoleküle wesentlich. Ferner kann das gleiche Molekül mehrfach auftreten. Dies ist eine Variation mit Wiederholung. Es ergeben sich

$$\underbrace{4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 4}_{\text{260 Faktoren}} = 4^{260}$$

Möglichkeiten.

Bei der Umformung in eine Zehnerpotenz muß das x mit

$$10^x = 4^{260}$$

bestimmt werden. Eine Gleichung, bei der die Unbekannte im Exponenten steht, wird durch Logarithmieren gelöst. Es folgt

$$\log_{10} 10^x = x = \log_{10} 4^{260} = 260 \log_{10} 4.$$

also ist

$$x \approx 0,60206 \cdot 260 = 156,536.$$

Damit ergibt sich

$$4^{260} \approx 10^{156,536} = 10^{156} \cdot 10^{0,536} \approx 3,436 \cdot 10^{156} \approx 10^{156}.$$

Bei der Rundung auf eine Zehnerpotenz mit ganzzahligem Exponenten ist ein interessantes Detail zu beachten: Man darf nicht $156,536$ auf 157 aufrunden. Vielmehr darf erst am Schluß gerundet werden; es ergibt sich dann 156 als Exponent. Das erscheint zunächst verblüffend, kann aber anschaulich mit der Krümmung der Kurve von $y = 10^x$ erklärt werden. (Die Kurve ist konvex; deshalb wird die Mitte des Intervalls $[0; 1]$ nicht auf die Mitte des Intervalls [1;10] abgebildet.)

Aufgabe 10.
Wie groß muß die Mindestlänge eines DNA-Strangs, d.h. die Mindestanzahl hintereinander aufgereihter Nukleotide sein, damit mindestens 10^{100} unterschiedliche Kodierungen möglich sind?

Lösung: Besteht ein DNA-Strang aus x Nukleotiden, sind 4^x Kodierungen möglich. Wir lösen also die Gleichung

$$4^x = 10^{100}.$$

Die gesuchte Mindestlänge ist dann $\lceil x \rceil$, der nächstgrößere ganzzahlige Wert. Logarithmieren der Gleichung liefert

$$\log_{10} 4^x = \log_{10} 10^{100} = 100.$$

Mit dem Logarithmengesetz $\log(a^b) = b\log(a)$ (für $a > 0$) folgt

$$x \log_{10} 4 = 100,$$

und daraus

$$x = \frac{100}{\log_{10} 4} \approx 166,096.$$

Die gesuchte Mindestlänge ist also $\lceil 166,096 \rceil = 167$.

Aufgabe 11.
Zur Kennzeichnung der verschiedenen Varianten eines elektronischen Bauteils soll ein Code benutzt werden, der aus 4 nebeneinanderliegenden verschiedenfarbigen Balken besteht, die auf das Bauteil aufgedruckt werden. Der erste Balken ist immer schwarz, für die anderen werden die Farben Rot, Grün, Gelb, Braun, Orange, Cyan, Magenta und Blau verwendet.

Wieviel Codierungen sind möglich, wenn keine Farbe mehrfach vorkommen darf?

Lösung: Abgesehen von Schwarz haben wir 8 Farben zur Auswahl. Bei der ersten Färbung gibt es dann 8 Wahlmöglichkeiten, bei der zweiten nur noch 7, da eine Farbe bereits verwendet wurde. Schließlich haben wir bei der dritten Färbung noch 6 Möglichkeiten, da zwei der 8 Farben schon benutzt wurden und nicht mehr verwendet werden dürfen. Insgesamt gibt es damit

$$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

Kodierungen.

Mit anderen Worten: Wir haben eine Variation dritter Ordnung von acht Elementen ohne Wiederholung

$$v(n,k) = v(8,3) = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

Aufgabe 12.
Wieviele Gruppen können aus 7 Männern und 5 Frauen gebildet werden, wobei die Gruppen sich zusammensetzen aus

(a) 3 Männern und 5 Frauen;

(b) 5 Personen, von denen mindestens 3 Männer sind?

Lösung:

(a) Aus einer Gruppe von 7 Männern werden 3 ausgewählt. Die Reihenfolge spielt keine Rolle. Gehören Donald, Linus und Bill zum Klub, dann ist es egal, ob zuerst Donald, dann Bill und zuletzt Linus Mitglied wurde oder erst Bill, dann Linus und schließlich Donald. Das ist die Situation des Zahlenlottos, es wird gezogen, und die Reihenfolge der Ziehung spielt keine Rolle. Also gibt es bei den Männern

$$\binom{7}{3}$$

Möglichkeiten. Alle 5 Frauen müssen Mitglieder der Gruppe sein, hier gibt es keine Auswahl. Will man das unbedingt mit einem Binomialkoeffizienten schreiben, hat man

$$\binom{5}{5} = 1.$$

Insgesamt gibt es also

$$\binom{7}{3} \cdot \binom{5}{5} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 1 = 35$$

Möglichkeiten für die Zusammensetzung der Gruppe.

(b) „Mindestens 3 Männer" heißt bei einer Gesamtzahl von 5 Personen: entweder genau 3 Männer, oder genau 4 Männer, oder genau 5 Männer.

Sind genau 3 Männer in der Gruppe, gibt es

$$\binom{7}{3} \cdot \binom{5}{2} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 350$$

Möglichkeiten für die Zusammensetzung.

Bei genau 4 Männern haben wir

$$\binom{7}{4} \cdot \binom{5}{1} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 5 = 175$$

unterschiedliche Gruppen.

Schließlich gibt es bei genau 5 Männern

$$\binom{7}{5} \cdot \binom{5}{0} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 21$$

Gruppen.

Die Gesamtzahl der Gruppen ergibt sich als Summe

$$350 + 175 + 21 = 546.$$

Aufgabe 13.
Es sollen 5 Männer und 4 Frauen in einer Reihe sitzen, und zwar so, daß die Frauen die geraden Plätze einnehmen. Wie viele solcher Anordnungen sind möglich?

Lösung: Die Anzahl der Permutationen (Möglichkeiten der Anordnung) der Frauen ist 4!. Die Anzahl der Permutationen der Männer ist 5!.

Jede Anordnung der Frauen ist mit jeder Anordnung der Männer kombinierbar. Also gibt es insgesamt

$$4! \cdot 5! = 24 \cdot 120 = 2880$$

Anordnungen.

Da die Plätze der Frauen und der Männer festgelegt sind, gibt es keine weiteren Möglichkeiten durch einen Platztausch der Frauen und Männer untereinander.

Aufgabe 14.
In einem Gremium einer Hochschule haben die Studierenden 4 Sitze. Bei der Wahl zu diesem Gremium kandidieren aus jedem der 9 Fachbereiche mindestens 4 Studierende, so daß ein Ergebnis möglich ist, bei dem alle studentischen Mitglieder aus nur einem Fachbereich kommen. Numerieren wir die Fachbereiche von 1 bis 9, können z.B. alle aus FB 6 oder alle aus FB 8 sein. Es können aber auch zwei aus FB 7, einer aus FB 3 und einer aus FB 1 sein.

Wieviele verschiedene solcher Verteilungen der 4 Sitze auf die 9 Fachbereiche sind insgesamt möglich?

Lösung: Die Reihenfolge bzw. die Stimmenzahl, mit der die vier studentischen Mitglieder des Gremiums gewählt wurden, spielt für unsere Betrachtung keine Rolle. Es kommt nur darauf an, ob man Mitglied ist oder nicht. Sind z.B. drei der Studierenden aus FB 7 und einer aus FB 4, ist es egal, wer mit den meisten Stimmen gewählt wurde. Wir haben also eine Kombination.

Da aus jedem Fachbereich genügend Personen kandidieren, könnten die Sitze komplett mit Mitgliedern jedes beliebigen Fachbereichs besetzt werden. Es sind also bei den Zugehörigkeiten zu den Fachbereichen uneingeschränkt Wiederholungen möglich. Also haben wir eine Kombination mit Wiederholung.

Wir wählen aus der Menge M der Fachbereiche aus, M hat $n = 9$ Elemente. Da wir $k = 4$ Personen auswählen, gibt es

$$c^*(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$$

also

$$c^*(9,4) = \binom{9+4-1}{4} = \binom{12}{4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495$$

Möglichkeiten, nämlich die Anzahl der Kombinationen 4. Ordnung von 9 Elementen mit Wiederholung.

Aufgabe 15.
Ein Ausschuß der Fachhochschule soll aus 10 Studierenden bestehen, wobei 4 Studierende aus dem Fachbereich KMUB, 3 Studierende aus dem FB E1 und ebenfalls 3 Studierende aus dem FB MNI sein sollen.

Es stellen sich 6 KMUB-, 8 E1-, und 5 MNI-Studierende zur Verfügung. Wieviele Möglichkeiten zur Bildung des Ausschusses gibt es?

Lösung: Für KMUB werden 4 Personen aus 6 ausgewählt, für E1 sind es 3 Personen aus 8 und für MNI werden 3 Personen aus 5 bestimmt. Bei der Auswahl kommt es nicht auf die Reihenfolge an, nur die Mitgliedschaft in dem Gremium ist relevant. Also wird die Anzahl der Möglichkeiten jeweils mit einem Binomialkoeffizienten berechnet.

Da jede Auswahl des einen Fachbereichs mit jeder Auswahl der anderen Fachbereiche verknüpft werden kann, müssen die drei Binomialkoeffizienten miteinander multipliziert werden. Insgesamt gibt es damit

$$\underbrace{\binom{6}{4}}_{\text{KMUB}} \cdot \underbrace{\binom{8}{3}}_{\text{E1}} \cdot \underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{MNI}} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 15 \cdot 56 \cdot 10 = 8400$$

Möglichkeiten zur Bildung des Ausschusses.

Aufgabe 16.
Wieviel vierstellige Zahlen können mit den Ziffern 1, 3, 5, 7, 8 und 9 gebildet werden, wenn keine dieser Ziffern mehr als einmal in jeder Zahl auftreten darf?

Lösung: Wir haben sechs unterschiedliche Ziffern, aus denen vier gezogen werden sollen; die Reihenfolge ist dabei zu beachten, da $1357 \neq 7315$ ist. Also haben wir eine Variation (Reihenfolge beachten) ohne Wiederholung (keine Ziffer mehrfach).

Bei der 1. Ziehung gibt es 6 Möglichkeiten, bei der 2. Ziehung 5 Möglichkeiten u.s.w. Die Gesamtzahl der Möglichkeiten ist das Produkt

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360.$$