Zahlenmengen

Aufgabe 1.
Welche Zahlenmengen erhält man durch die folgenden Mengenoperationen?

a) $\mathbb{Z} \setminus (\mathbb{N} \cup \{0\})$ b) $\complement_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q})$ c) $\complement_{\mathbb{N}}(\mathbb{N})$ d) $\complement_{\mathbb{N}}\big(\mathbb{N} \setminus \{1,2,3,4,5\}\big)$

Lösung:

a) $\mathbb{Z} \setminus (\mathbb{N} \cup \{0\}) = \{-1, -2, -3, \dots\}$

Man erhält die Menge der negativen ganzen Zahlen.

b) $\complement_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q})$ ist die Menge der irrationalen Zahlen.

c) $\complement_{\mathbb{N}}(\mathbb{N}) = \emptyset$

Es ergibt sich die leere Menge.

d) $\complement_{\mathbb{N}}\big(\mathbb{N} \setminus \{1,2,3,4,5\}\big) = \{1,2,3,4,5\}$

Aufgabe 2.
Rechnen Sie die periodischen Dezimalzahlen $0,\overline{12}$ und $5,\overline{47}$ sowie $0,3\overline{7}$ und $7,5\overline{26}$ in Brüche um.

Lösung:

a) $x = 0,\overline{12}$

Aus der Differenz $100x - x = 12,\overline{12} - 0,\overline{12} = 12$ ergibt sich $99x = 12$ und daraus $x = 12/99 = 4/33$. Also ist

$$0,\overline{12} = \frac{4}{33}\,.$$

b) $x = 5,\overline{47}$

Aus $100x - x = 547,\overline{47} - 5,\overline{47} = 542$ bekommen wir $99x = 542$, das ergibt $x = 542/99$, also haben wir

$$5,\overline{47} = \frac{542}{99}\,.$$

c) $x = 0,3\overline{7}$

Aus $100x - 10x = 37,\overline{7} - 3,\overline{7} = 34$ folgt $90x = 34$, d.h. $x = 34/90 = 17/45$. Also ist

$$0,3\overline{7} = \frac{17}{45}\,.$$

Copyright © 2010 Prof. Dr. Hans-Rudolf Metz. All rights reserved.

d) $x = 7,5\overline{26}$

Aus $1000x - 10x = 7526,\overline{26} - 75,\overline{26} = 7451$ folgt schließlich $990x = 7451$, das ergibt $x = 7451/990$, und wir haben somit

$$7,5\overline{26} = \frac{7451}{990}\,.$$

Aufgabe 3.

Berechnen Sie die kartesischen Darstellungen der folgenden komplexen Zahlen.

a) $(7-3i)+(3+9i)$ b) $(-17+4i)-(8-7i)$ c) $(3-5i)\cdot(2+3i)$

d) $(3,5-i)\cdot(7+2,5i)$ e) $(4,5-1,5i)^2$ f) $i\cdot(2,5-i)^2$

g) $\dfrac{1}{7-3i}$ h) $\dfrac{-5+3i}{7+2i}$

Lösung:

a) $(7-3i)+(3+9i) = 10+6i$

Die Klammern sind nicht notwendig und sollen nur veranschaulichen, daß hier zwei komplexe Zahlen addiert werden.

b) $(-17+4i)-(8-7i) = -25+11i$

Das erste Klammernpaar ist nicht notwendig, das zweite kann wegen des Minuszeichens nicht weggelassen werden.

c) $(3-5i)\cdot(2+3i) = 6-15i^2+9i-10i = 21-i$

Hier sind beide Klammernpaare notwendig.

d) $(3,5-i)\cdot(7+2,5i) = \left(\frac{7}{2}-i\right)\left(7+\frac{5}{2}i\right) = \frac{49}{2}-\frac{5}{2}i^2+\frac{35}{4}i-7i = 27+\frac{7}{4}i$

$= 27+1,75i$

e) $(4,5-1,5i)^2 = \left(\frac{9}{2}-\frac{3}{2}i\right)^2 = \frac{81}{4}-\frac{27}{2}i+\frac{9}{4}i^2 = 18-\frac{27}{2}i = 18-13,5i$

f) $i\cdot(2,5-i)^2 = i\left(\frac{5}{2}-i\right)^2 = i\left(\frac{25}{4}-5i+i^2\right) = 5+\frac{21}{4}i = 5+5,25i$

g) $\dfrac{1}{7-3i} = \dfrac{7+3i}{(7-3i)(7+3i)} = \dfrac{7+3i}{49+9} = \dfrac{7}{58}+\dfrac{3}{58}i$

h) $\dfrac{-5+3i}{7+2i} = \dfrac{(-5+3i)(7-2i)}{(7+2i)(7-2i)} = \dfrac{-35+10i+21i-6i^2}{49+4} = \dfrac{-29+31i}{53}$

$= -\dfrac{29}{53}+\dfrac{31}{53}i$

Aufgabe 4.
Die folgenden Ausdrücke sind zu berechnen.

a) $\dfrac{17-6i}{3-4i}$ b) $\dfrac{1+3i}{1-i}$ c) $\dfrac{5}{1-2i}$ d) $\dfrac{(3+i)^2}{2-i}$

Lösung:

a) $\dfrac{17-6i}{3-4i} = \dfrac{(17-6i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \dfrac{51+68i-18i+24}{9+16} = \dfrac{75+50i}{25} = 3+2i$

b) $\dfrac{1+3i}{1-i} = \dfrac{(1+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{1+i+3i+3i^2}{1+1} = \dfrac{-2+4i}{2} = -1+2i$

c) $\dfrac{5}{1-2i} = \dfrac{5(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{5+10i}{1+4} = 1+2i$

d) $\dfrac{(3+i)^2}{2-i} = \dfrac{9+6i+i^2}{2-i} = \dfrac{(8+6i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{16+8i+12i+6i^2}{4+1}$

$= \dfrac{10+20i}{5} = 2+4i$

Aufgabe 5.
Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 3-2i$ und $z_2 = 4+2i$. Berechnen Sie

$$z_3 = z_1 \cdot z_2, \quad \mathrm{Re}\,(z_3), \quad \mathrm{Im}\,(z_3), \quad z_3^*, \quad |z_3|$$

und

$$z_4 = \frac{z_1}{z_2}\,, \quad \mathrm{Re}\,(z_4), \quad \mathrm{Im}\,(z_4), \quad z_4^*, \quad |z_4|.$$

Lösung:

$z_3 = (3-2i)(4+2i) = 12+6i-8i-4i^2 = 16-2i$

$\mathrm{Re}(z_3) = 16; \qquad \mathrm{Im}(z_3) = -2; \qquad z_3^* = 16+2i$

$|z_3| = \sqrt{16^2+(-2)^2} = \sqrt{260}$

$z_4 = \dfrac{3-2i}{4+2i} = \dfrac{(3-2i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)} = \dfrac{12-6i-8i+4i^2}{16+4} = \dfrac{8-14i}{20} = \dfrac{4}{10} - \dfrac{7}{10}\,i$

$= 0,4-0,7i$

$\mathrm{Re}(z_4) = 0,4; \qquad \mathrm{Im}(z_4) = -0,7; \qquad z_4^* = 0,4+0,7i$

$|z_4| = \sqrt{\dfrac{16}{100}+\dfrac{49}{100}} = \sqrt{\dfrac{65}{100}} = \dfrac{1}{10}\sqrt{65} \approx 0,8$

Aufgabe 6.
Für welche reellen Zahlen a und b gilt

$$(a+2i)\cdot(1+bi)=(5-3i)^2 \qquad ?$$

Lösung: Hinter *einer* Gleichung für komplexe Zahlen verbergen sich *zwei* Gleichungen für reelle Zahlen.

$$\begin{aligned}(a+2i)(1+bi) &= (5-3i)^2\\ a+abi+2i+2bi^2 &= 25-30i+9i^2\\ a-2b+(ab+2)i &= 16-30i\end{aligned}$$

Realteil links gleich Realteil rechts gibt

$$a-2b=16. \tag{1}$$

Imaginärteile gleichgesetzt liefert

$$2+ab=-30. \tag{2}$$

Geometrisch bedeutet das: zwei Punkte der komplexen Ebene sind gleich, wenn die waagrechten und die senkrechten Koordinaten übereinstimmen.

Aus Gleichung (1) folgt

$$a=16+2b. \tag{3}$$

In Gleichung (2) eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned}2+16b+2b^2 &= -30\\ 32+16b+2b^2 &= 0\\ b^2+8b+16 &= 0\\ b_{1,2} &= -4\pm\sqrt{16-16}\\ b &= -4.\end{aligned}$$

Aus Gleichung (3) folgt dann

$$a=16+2(-4)=8.$$

Damit haben wir als Endergebnis $a=8$ und $b=-4$.