Funktionen

Einige elementare Funktionen und ihre Eigenschaften

- Definition

  Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
  $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$
  wobei $n \in \mathbb{N}$ ist, heißt ***Polynom* $\mathbf{n}$*-ten Grades*** oder ***ganzrationale Funktion***. Die $a_0, \ldots, a_n$ ($a_n \neq 0$) heißen ***Koeffizienten***.

- Anmerkung: Spezialfälle sind die konstante, lineare, quadratische und kubische Funktion, sowie allgemein die Potenzfunktion $y = x^n$ mit natürlichem Exponenten n.

- Satz

  Es sei $f(x)$ ein Polynom vom Grade n und x_1 eine Nullstelle von f, d.h. $f(x_1) = 0$. Dann ist
  $$f(x) = (x - x_1) \cdot f_1(x)$$
  mit dem 1. reduzierten Polynom f_1, das den Grad $n - 1$ hat, und dem Linearfaktor $(x - x_1)$.

- Anmerkung: Man berechnet f_1 durch eine Polynomdivision, bei der f durch $(x - x_1)$ geteilt wird.

- Satz

  Ein Polynom n-ten Grades besitzt höchstens n reelle Nullstellen.

  Hat es genau n reelle Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so gilt
  $$\begin{aligned} f(x) &= a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0 \\ &= a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n). \end{aligned}$$

- Lineare Funktionen

  Der Graph einer linearen Funktion ist eine ***Gerade***. Ist eine lineare Funktion in der Form $y = mx + b$ gegeben, so ist m die Steigung der Geraden und b der Abschnitt auf der y-Achse. (Skizze zeichnen!)

  Wird eine Gerade durch ihre Steigung m und durch einen Punkt $P_1(x_1|y_1)$ auf der Geraden definiert, erhält man die zugehörige Funktion wie folgt: Es sei $P(x|y)$ ein beliebiger Punkt ungleich P_1 auf der Geraden. Die Steigung ist dann die Differenz der y-Werte geteilt durch die Differenz der x-Werte

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}\,.$$

(Skizze zeichnen!)

Ist eine Gerade durch zwei Punkte $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ gegeben, ist die Steigung zwischen P_1 und P_2 gleich der Steigung zwischen P_1 und P, also

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,.$$

(Skizze zeichnen!)

- Quadratische Funktionen

  Der Graph einer quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ ist eine ***Parabel***. Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben geöffnet, für $a < 0$ nach unten.

  Hat die Parabel Schnittpunkte mit der waagrechten Achse, berechnet man die Koordinaten durch Lösen der quadratischen Gleichung $ax^2+bx+c = 0$. Wenn die Parabel keine Schnittpunkte mit der waagrechten Achse hat, erhält man beim Lösen der quadratischen Gleichung eine Wurzel aus einer negativen Zahl.

- Definition

  Der Quotient zweier Polynome

  $$r(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{m-1}x^{m-1} + b_m x^m}$$

  heißt ***gebrochenrationale Funktion***. Der Definitionsbereich ist

  $$D(r) = \{x \in \mathbb{R} \mid b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m \neq 0\}.$$

  Für $m > n$ ist die Funktion *echt* gebrochenrational, für $m \leq n$ *unecht* gebrochenrational.

- Anmerkung: Haben das Zähler- und das Nennerpolynom eine gemeinsame Nullstelle x_0, so kann man den Linearfaktor $(x - x_0)$ kürzen. Die Definitionslücke an der Stelle x_0 wird dadurch behoben.

  Hat man so weit wie möglich gekürzt, haben Zähler- und Nennerpolynom keine gemeinsame Nullstelle mehr. Die Nullstellen des Zählerpolynoms sind dann die Nullstellen der gebrochenrationalen Funktion. Die Nullstellen des Nennerpolynoms sind Polstellen (Unendlichkeitsstellen).

- Anmerkung: Ist $r(x)$ unecht gebrochenrational, kann man die Funktion durch Polynomdivision — bei der man den Zähler durch den Nenner teilt — in

  $$r(x) = p(x) + g(x)$$

zerlegen, wobei p ein Polynom und g eine echt gebrochenrationale Funktion ist. Für wachsendes x werden die Werte von $g(x)$ immer kleiner, unabhängig vom Vorzeichen von x, so daß sich die Kurve von r immer dichter an die Kurve von p anschmiegt. Man nennt p deshalb die Asymptote von r im Unendlichen.

- Definition

  Funktionen $f(x) = x^a$ mit konstantem Exponenten a und variabler Basis x heißen ***Potenzfunktionen***. Im allgemeinen Fall, also für beliebige reelle Exponenten a, sind sie für positive x definiert.

- Anmerkung: In wichtigen Fällen erweitert sich der Definitionsbereich. Dazu seien nur Zahlen aus bestimmten Teilmengen von $\mathbb{R}$ für die Exponenten zugelassen.

  - Natürliche Zahlen: $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Definitionbereich ist $D(f) = \mathbb{R}$.
  - Negative ganze Zahlen: $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Definitionbereich ist $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
  - Ist n *gerade*, sind die Funktionen $y = x^n$ für $x \geq 0$ streng monoton, also auf dem Intervall $[0, \infty)$ umkehrbar. Die Umkehrfunktionen sind die ***Wurzelfunktionen*** $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und n gerade. Definitionbereich ist $D(f) = [0, \infty)$.
  - Ist n *ungerade*, sind die Funktionen $y = x^n$ auf $\mathbb{R}$ streng monoton und somit umkehrbar. Umkehrfunktionen sind die ***Wurzelfunktionen*** $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und n ungerade. Definitionbereich ist $D(f) = \mathbb{R}$.

- Anmerkung: Man beachte die Rechenregeln für Potenzen. Für x, x_1, $x_2 > 0$ und a, $b \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} x^a \cdot x^b &= x^{a+b} \\ \frac{x^a}{x^b} &= x^{a-b} \\ (x^a)^b &= x^{ab} = (x^b)^a \\ x_1^a \cdot x_2^a &= (x_1 \cdot x_2)^a \end{aligned}$$

  Speziell mit m, $n \in \mathbb{N}$ gilt für Wurzeln

$$\begin{aligned} x^{m/n} &= \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m \\ \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2} &= \sqrt[n]{x_1} \cdot \sqrt[n]{x_2} \\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} &= \sqrt[mn]{x} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} \end{aligned}$$

- Definition

  Funktionen vom Typ $f(x) = b^x$ mit konstanter Basis $b > 0$ und $b \neq 1$ heißen ***Exponentialfunktionen***. Der Exponent x ist variabel und darf beliebige reelle Werte annehmen, d.h. der Definitionsbereich ist $D(f) = \mathbb{R}$.

Von besonderer Bedeutung ist die Exponentialfunktion mit der Basis e, die **e-*Funktion***

$$y = e^x = \exp(x).$$

Näherungsweise ist $e \approx 2,71$.

- Anmerkung: Man beachte, daß speziell die Rechenregeln $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$ und $e^a/e^b = e^{a-b}$ sowie $(e^a)^b = e^{ab}$ gelten.

- Definition

  Es sei $b > 0$ und $b \neq 1$. Die Umkehrfunktion zu $y = b^x$ heißt ***Logarithmus zur Basis* b**, geschrieben $f(x) = \log_b x$. Der Definitionbereich ist die Menge der positiven reellen Zahlen, $D(f) = (0, \infty)$.

  Die Umkehrfunktion zur e-Funktion wird als ***natürlicher Logarithmus*** bezeichnet und $f(x) = \log_e x = \ln x$ geschrieben.

- Anmerkung: Für Logarithmen gelten die folgenden Rechenregeln, wobei $b > 0$ und $b \neq 1$ sowie x, x_1, $x_2 > 0$ und $r \in \mathbb{R}$ sei.

$$\begin{aligned} \log_b(x_1 \cdot x_2) &= \log_b x_1 + \log_b x_2 \\ \log_b\left(\frac{x_1}{x_2}\right) &= \log_b x_1 - \log_b x_2 \\ \log_b(x^r) &= r \log_b x \end{aligned}$$

  Ferner ist $\log_b 1 = 0$ und $\log_b b = 1$ sowie $b^{\log_b x} = x$ und $\log_b b^x = x$.

- Anmerkung: Besonders oft wird die Beziehung

$$x^r = e^{\ln(x^r)} = e^{r \cdot \ln x}$$

  verwendet, die für $x > 0$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt.

- Definition

  Wir definieren die ***Winkelfunktionen*** (auch ***trigonometrische Funktionen*** genannt) Sinus, Cosinus und Tangens geometrisch am Einheitskreis.

- Skizze

- Gradmaß und Bogenmaß.

- Anmerkung: Es ist $\sin(30°) = 1/2$ sowie $\sin(45°) = \sqrt{2}/2$ und $\sin(60°) = \sqrt{3}/2$. Durch Symmetrieüberlegungen kann man dies auf andere Winkel und auf die Cosinusfunktion übertragen.

- Satz

  Für beliebige $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

  Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos x \neq 0$ gilt

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

- Satz (Eigenschaften der Winkelfunktionen)

  1. Periodizität
     $\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (2π-periodisch)
     $\cos(x + 2\pi) = \cos x \quad$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (2π-periodisch)
     $\tan(x + \pi) = \tan x \quad$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{x | \cos x = 0\}$ (π-periodisch)
  2. Symmetrie
     $\sin(-x) = -\sin x$
     $\cos(-x) = \cos x$
     $\tan(-x) = -\tan x$
  3. Nullstellen
     $\sin(x_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_n = n\pi \ (n \in \mathbb{Z})$
     $\cos(x_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi \ (n \in \mathbb{Z})$
     $\tan(x_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x_n) = 0$
  4. Pole
     $\tan(x_n) = \pm\infty \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x_n) = 0$

- Satz (Additionstheoreme der Winkelfunktionen)
  Es gilt

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta). \end{aligned}$$