Funktionen

Grundbegriffe

- Definition (Funktion)

  Es seien A und B Mengen. Eine ***Funktion*** (oder *Abbildung*) f von A nach B,

  $$f:\ A \to B$$

  ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in A$ genau ein Element $y \in B$ zuordnet. Schreibweise:

  $$x \mapsto y \qquad \text{oder} \qquad y = f(x).$$

  Dabei heißt x die *unabhängige* und y die *abhängige* Variable.

  Die Menge A heißt ***Definitionsbereich*** (oder *Definitionsmenge*) von f, geschrieben $D(f)$. Die Menge $\{y|\, y = f(x),\, x \in A\} \subseteq B$ heißt ***Wertebereich*** (oder *Wertemenge*, *Bildmenge*) von f, kurz $W(f)$. Die Menge B wird ***Zielmenge*** genannt.

- Anmerkung: Wegen der Eindeutigkeit einer Funktion kann nicht gleichzeitig $x \mapsto y_1$ und $x \mapsto y_2$ gelten. Hingegen ist $f(x_1) = f(x_2)$ erlaubt. (Skizzen!)

- Beispiele:
  - Abbildung von sechsstelligen Zahlen (Matrikelnummern) auf Zeichenketten (Namen).
  - Abbildung von Programmeingabe auf Programmausgabe.
  - Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ durch $x \mapsto 0,5x + 1$.

- Definition (Graph)

  Der ***Graph*** einer Funktion $f:\ A \to B$ ist die Menge der geordneten Paare $\{(x, y)|\, x \in A \text{ und } f(x) = y\}$.

- Beispiel: Die Funktionen $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ und $f:\ \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2$.

- Anmerkung: Der Graph einer Funktion $f:\ A \to B$ ist eine spezielle Teilmenge des kartesischen Produktes $A \times B$. Charakteristisch für den Funktionsbegriff ist, daß es zu jedem $x \in A$ genau ein Paar $(x, y) \in A \times B$ mit x als erstem Element gibt. Dies kann man für eine alternative Definition des Funktionsbegriffs nutzen; dabei unterscheidet man nicht mehr zwischen „Abbildung“ und „Graph“.

Es seien A und B Mengen. Eine Abbildung $f : A \to B$ ist eine Teilmenge G von $A \times B$ mit der Eigenschaft: zu jedem $x \in A$ existiert genau ein $y \in B$ derart, daß $(x, y) \in G$ ist. Wir schreiben $y = f(x)$.

- Definition

  Es sei $f : A \to B$ eine Funktion.

  1. f heißt ***injektiv*** (*eineindeutig*, *umkehrbar*), wenn aus x_1, $x_2 \in A$ mit $x_1 \neq x_2$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$ folgt (gleichwertig: wenn aus $f(x_1) = f(x_2)$ mit x_1, $x_2 \in A$ stets $x_1 = x_2$ folgt).
  2. f heißt ***surjektiv***, falls $W(f) = B$.
  3. f heißt ***bijektiv***, falls f injektiv und surjektiv ist.

- Beispiele mit endlichen und unendlichen Definitions- und Wertebereichen. Graphische Veranschaulichung.

- Satz

  Es seien A und B *endliche* Mengen mit $|A| = |B|$, und es sei f eine Abbildung $f : A \to B$. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

  1. f ist injektiv,
  2. f ist surjektiv,
  3. f ist bijektiv.

- Definition (Umkehrfunktion)

  Die Funktion $f : A \to B$ sei injektiv. Wir ordnen jedem $b \in W(f)$ das eindeutig existierende Element $a \in A$ zu, für das $f(a) = b$ gilt, und nennen diese Funktion die ***Umkehrfunktion*** von f, geschrieben f^{-1}.

  Also ist $f^{-1} : W(f) \to A$, und es ist $f^{-1}(b) = a$, wenn $f(a) = b$ gilt.

- Beispiele

- Es seien A, $B \subseteq \mathbb{R}$ und $f : A \to B$, also eine reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen, wir schreiben $y = f(x)$. Die Umkehrfunktion kann graphisch und rechnerisch bestimmt werden.

  – Graphisch: Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten des x-y-Koordinatensystems.

  – Rechnerisch: $y = f(x)$ nach x auflösen (falls möglich); dann x und y vertauschen.

- Beispiel

- Definition (Eigenschaften von Funktionen)

  Es seien A, $B \subseteq \mathbb{R}$ und $f : A \to B$, also eine reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen, wir schreiben $y = f(x)$.

Die Funktion f heißt

gerade $\Leftrightarrow$ $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D(f)$;

ungerade $\Leftrightarrow$ $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D(f)$;

monoton wachsend $\Leftrightarrow$ $f(x_2) \geq f(x_1)$ für $x_2 > x_1$ mit x_1, $x_2 \in D(f)$;

streng monoton wachsend $\Leftrightarrow$ $f(x_2) > f(x_1)$ für $x_2 > x_1$ mit x_1, $x_2 \in D(f)$;

monoton fallend $\Leftrightarrow$ $f(x_2) \leq f(x_1)$ für $x_2 > x_1$ mit x_1, $x_2 \in D(f)$;

streng monoton fallend $\Leftrightarrow$ $f(x_2) < f(x_1)$ für $x_2 > x_1$ mit x_1, $x_2 \in D(f)$;

(streng) monoton $\Leftrightarrow$ f (streng) monoton wachsend oder fallend;

periodisch $\Leftrightarrow$ existiert ein $p > 0$ mit $f(x + p) = f(x)$ für alle $x \in D(f)$;

beschränkt $\Leftrightarrow$ existiert ein $k > 0$ mit $|f(x)| \leq k$ für alle $x \in D(f)$.

- Veranschaulichungen und Beispiele.
- Beispiele: Wir betrachten die Graphen
  - der Potenzfunktionen $y = x^2$, $y = x^3$ und $y = x^4$,
  - der Wurzelfunktionen $y = \sqrt{x}$ und $y = \sqrt[3]{x}$,
  - der Winkelfunktionen $y = \sin(x)$ und $y = \cos(x)$.

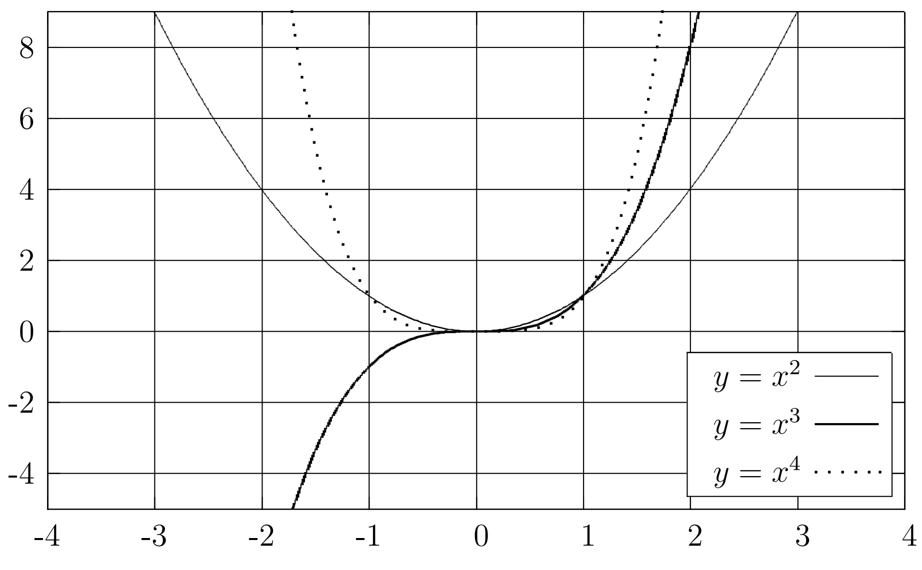

Abbildung 1: Potenzfunktionen

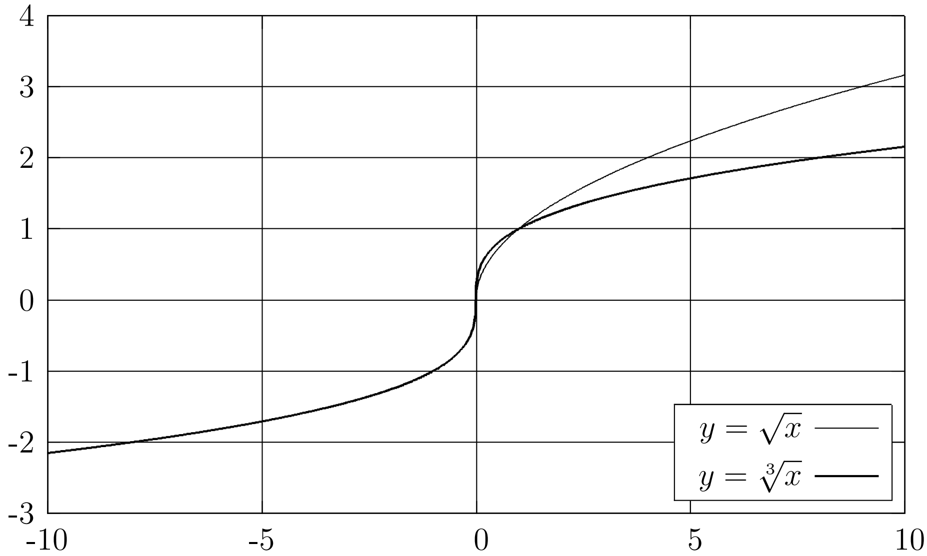

Abbildung 2: Wurzelfunktionen

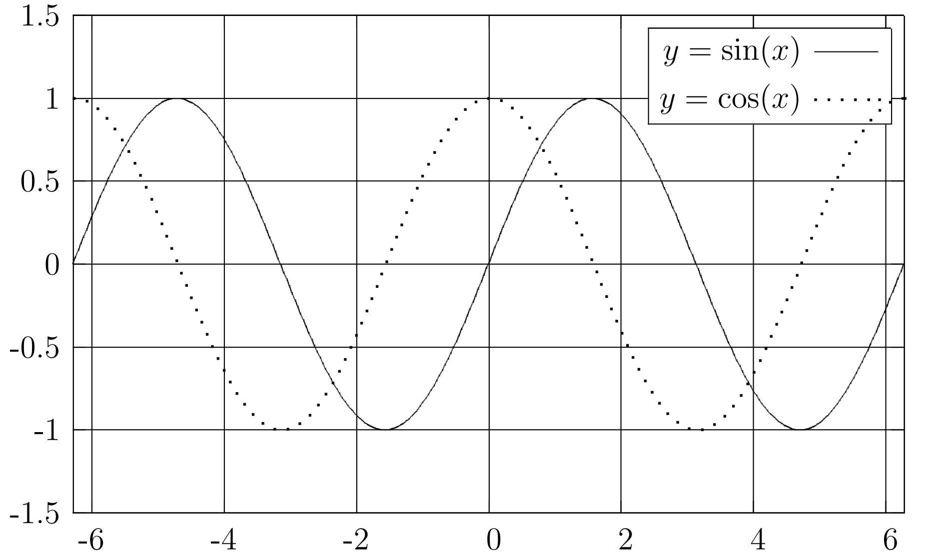

Abbildung 3: Winkelfunktionen