

Zahlenmengen

Komplexe Zahlen

- Im folgenden führen wir die **komplexen Zahlen** ein. Zunächst machen wir uns klar, warum die reellen Zahlen nicht ausreichen; dann betrachten wir die vier Grundrechenarten für die komplexen Zahlen.
- Problemstellung: Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat keine reelle Lösung. Skizze.
- Idee: Einführung „neuer Zahlen“; Erweiterung von \mathbb{R} (ähnlich: Erweiterung von \mathbb{Q} zu \mathbb{R}).
- Definition
Das Symbol i sei eine „Zahl“ mit $i^2 = -1$. Wir nennen i die **imaginäre Einheit**.
- Anmerkung: In den Ingenieurwissenschaften verwendet man anstelle von i auch das Symbol j , weil i in der Elektrotechnik für die Stromstärke steht.
- Anmerkung: Das Rechnen mit i „wie im Reellen“ unter Berücksichtigung von $i^2 = -1$ führt zu sinnvollen Anwendungen. Vielfache von i sind dann z.B. $2i$, $\frac{5}{2}i$ und $(-\frac{7}{3})i$. Wird noch eine reelle Zahl addiert, entstehen Ausdrücke wie z.B. $6 + 2i$ oder $5 - \frac{7}{3}i$. Ferner ist $2i = i2$ und $6 + 2i = 2i + 6$ u.s.w.
- Definition
Zahlen der Gestalt bi mit $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ heißen **(rein) imaginäre Zahlen**.
Zahlen der Form $a+bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ heißen **komplexe Zahlen**. Wir bezeichnen
$$\mathbb{C} = \{z \mid z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}\}$$
als **Menge der komplexen Zahlen**.
Zu $z = a + bi$ heißt $a = \operatorname{Re}(z)$ der **Realteil** von z und $b = \operatorname{Im}(z)$ der **Imaginärteil** von z .
- Anmerkung: Man beachte, daß sowohl der Real- als auch der Imaginärteil eine reelle Zahl ist.
- Rechenregeln (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division).

- Anmerkung: Es gilt

$$\begin{aligned} a + bi = c + di &\Leftrightarrow a = c \text{ und } b = d, \\ a + bi = 0 &\Leftrightarrow a = 0 \text{ und } b = 0, \\ a + bi \neq 0 &\Leftrightarrow a^2 + b^2 \neq 0. \end{aligned}$$

- Anmerkung: Man beachte, daß in \mathbb{C} keine Ordnungsrelation definiert ist. D.h. $<, >, \leq, \geq$ machen bei Zahlen aus \mathbb{C} , die nicht zur Teilmenge \mathbb{R} gehören, keinen Sinn.

- Darstellung der komplexen Zahlen in der **komplexen Ebene** (Gaußschen Ebene).

- Definition

Für $z = a + bi$ heißt

$$\bar{z} = a - bi$$

die zu z **konjugiert komplexe** Zahl.

- Anmerkung: Statt \bar{z} schreibt man auch z^* .

- Skizze und Beispiele.

- Definition

Zu $z = a + bi$ heißt die reelle Zahl

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

der **Betrag** von z .

- Skizze und Beispiele.

- Polarkoordinaten r, φ für eine Zahl $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$.

- Definition

Zur komplexen Zahl $z \neq 0$ heißt

$$z = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$$

die **trigonometrische Darstellung** von z . Der Winkel φ heißt **Argument** von z ,

$$\varphi = \arg(z).$$

- Umrechnungen zwischen cartesischen und polaren Koordinaten.