

## Mengenlehre

### Grundlegende Begriffe und Rechenregeln

- Definition (Menge)

Unter einer **Menge**  $M$  verstehen wir eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die **Elemente** von  $M$  genannt werden) zu einem Ganzen.

- Schreibweisen:

$a \in M$  steht für „ $a$  ist Element der Menge  $M$ “.

$a \notin M$  bedeutet „ $a$  ist nicht Element der Menge  $M$ “.

- Beispiele: Menge der natürlichen Zahlen, Menge der ganzen Zahlen u.s.w.

- Schreibweisen zur Charakterisierung von Mengen.

1. Aufzählende Darstellung, z.B.  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

2. Beschreibende Darstellung: Es sei  $P(x)$  ein Prädikat und  $M$  eine Menge. Dann sei

$$\{x \in M \mid P(x)\}$$

die Menge aller Elemente von  $M$ , die für  $x$  in  $P(x)$  eingesetzt,  $P(x)$  zu einer wahren Aussage machen.

$$a \in \{x \in M \mid P(x)\} \Leftrightarrow (a \in M \text{ und } P(a) \text{ ist wahr.})$$

- Definition

Es seien  $A$  und  $B$  Mengen.

1.  $A$  heißt **Teilmenge** von  $B$ , wenn aus  $x \in A$  stets  $x \in B$  folgt.

Schreibweise:  $A \subseteq B$ .

2. Wir schreiben  $A = B$  genau dann, wenn  $A \subseteq B$  und  $B \subseteq A$  gilt. Sonst:  $A \neq B$ .

3.  $A$  heißt genau dann eine echte Teilmenge von  $B$ , wenn  $A \subseteq B$  und  $A \neq B$  ist.

Schreibweise:  $A \subset B$ .

4. Die Menge, die keine Elemente enthält, heißt die **leere Menge**.

Schreibweise:  $\emptyset$ .

Festsetzung:  $\emptyset$  ist Teilmenge jeder Menge.

5. **Durchschnitt** von  $A$  und  $B$ :

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

6. **Vereinigung** von  $A$  mit  $B$ :

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

7. **Differenzmenge**  $A$  ohne  $B$ :

$$A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

8. Es sei  $B$  eine Teilmenge von  $A$ , also  $B \subseteq A$ . Das **Komplement** von  $B$  in  $A$  ist:

$$\mathcal{C}_A(B) = \overline{B}_A = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\} = A \setminus B.$$

9. Ist  $A \cap B = \emptyset$ , so heißen  $A$  und  $B$  *disjunkt* oder *elementfremd*.

10. Die Menge aller Teilmengen von  $A$  heißt die **Potenzmenge**  $\mathcal{P}(A)$  von  $A$ .

- Satz (Rechenregeln für die Verknüpfung von Mengen)

Es seien  $A$ ,  $B$  und  $C$  Mengen.

1. **Kommutativität** bei Durchschnitt und Vereinigung

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

2. **Assoziativität** bei Durchschnitt und Vereinigung

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

3. **Distributivität**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

4. **Regeln von de Morgan** bei dem Komplement eines Durchschnitts bzw. einer Vereinigung

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Das Komplement soll dabei bezüglich einer gemeinsamen Obermenge von  $A$  und  $B$  gebildet werden.

- Beweis der Regeln durch Rückführung auf entsprechende Gesetze der Aussagenlogik.
- Anmerkung: Die Schreibweise bei der Vereinigung von  $n$  Mengen  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ist

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i,$$

bzw. beim Durchschnitt

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i.$$

Diese Darstellungen sind wegen der Assoziativität von Vereinigung und Durchschnitt zulässig.

- Definition

Eine Menge heißt *endlich*, wenn sie nur endlich viele Elemente enthält.

Ist die Menge  $A$  endlich, so bezeichne  $|A|$  die Anzahl der Elemente von  $A$ . Man nennt  $|A|$  die **Mächtigkeit** (oder die *Kardinalität*) der Menge  $A$ .

Ist  $M$  nicht endlich, schreibt man  $|A| = \infty$ .

- Anmerkung: Es sei  $A \subseteq B$ . Ist  $B$  endlich, so ist  $A$  endlich. Ist  $A$  unendlich, so ist  $B$  unendlich.
- Beispiel:

$P$  = Menge der Primzahlen,  $Z$  = Menge der Primzahlzwillinge. Es ist  $Z \subset P$  und  $|P| = \infty$ . Aber  $|Z| = ?$

- Satz

Es seien  $A$  und  $B$  endliche Mengen. Es gilt

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

- Definition

Es seien  $A$  und  $B$  Mengen. Wir setzen

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Dabei sei

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \text{ und } b = b'.$$

Die Symbole  $(a, b)$  heißen die *geordneten Paare* von Elementen aus  $A$  und  $B$ .

$A \times B$  heißt das **kartesische Produkt** von  $A$  mit  $B$ .

Ist  $A = \emptyset$  oder  $B = \emptyset$ , so sei  $A \times B = \emptyset$ .

Wir schreiben  $A \times A = A^2$  und entsprechend  $A^1 = A$ .

- Beispiel
- Veranschaulichung in der Zeichenebene.
- Definition

Das kartesische Produkt von  $n$  Mengen  $A_1, \dots, A_n$  sei

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i\}.$$

Dabei sei

$$(a_1, \dots, a_n) = (a'_1, \dots, a'_n) \Leftrightarrow a_i = a'_i \text{ f\u00fcr alle } i.$$

Die  $(a_1, \dots, a_n)$  hei\u00dfen **n-Tupel**.

Schreibweise bei  $n$  \u00fcbereinstimmenden Mengen:  $A^n = \underbrace{A \times \dots \times A}_{n\text{-mal}}$ .

- Anmerkung: Der von uns verwendete (sogenannte „naive“ Mengenbegriff) kann zu Schwierigkeiten f\u00fchren. Augenf\u00e4llig macht dies die **Russellsche Antinomie** (Russellsches Paradoxon).

Wir bilden eine Menge  $R$  aus allen Mengen  $M$ , die sich nicht selbst enthalten, f\u00fcr die also  $M \notin M$  gilt. Es sei somit

$$R = \{M \mid M \notin M\}.$$

Jetzt kann man fragen, ob auch  $R \notin R$  gilt, oder ob  $R \in R$  ist. Aber *beide* Annahmen f\u00fchren auf einen Widerspruch! (Wir erhalten  $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$ .)

Um den Widerspruch zu vermeiden, mu\u00df man den Mengenbegriff ab\u00e4ndern; es wird nicht mehr erlaubt, beliebige Mengen entsprechend unserer „naiven“ Definition zu bilden.