Logik

Prädikate, Quantoren

- Ist „$x > 5$" eine Aussage?

  Für $x = 7$ ist der Ausdruck korrekt, für $x = 2$ ist er falsch. Also ist

  $$x > 5$$

  keine Aussage, denn eine Aussage ist entweder wahr oder falsch. Aber durch Einsetzen eines speziellen x-Wertes geht „$x > 5$" in eine Aussage über, z.B. in die wahre Aussage $7 > 5$ oder in die falsche Aussage $2 > 5$.

- Ein umgangssprachliches Beispiel ist „____ mag Lasagne.", das durch Einsetzen von „Garfield" zu einer wahren Aussage wird.

  Mehrere Variablen bzw. Leerstellen haben wir bei „$x = y + 3$", sowie bei „$x^2 + y^2 = z^2$" und bei „____ ist eine ____ und mag Lasagne.".

- Definition (Prädikat, Grundmenge)

  Ein ***Prädikat*** ist ein sprachliches Gebilde mit einer Leerstelle (Variablen), das durch Einsetzen eines Elementes aus einer bestimmten Menge M zu einer wahren oder falschen Aussage wird. Die Menge M heißt ***Grundmenge***.

  Bei n Leerstellen (Variablen) hat man ein ***n-stelliges Prädikat***.

- Beispiel: Steht $P(x)$ für $x > 5$, und sollen für x Werte aus der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen eingesetzt werden, ist $P(x)$ ein Prädikat über der Grundmenge $\mathbb{N}$.

- Beispiel: Steht $P(x, y)$ für $x < y$ über der Grundmenge $\mathbb{Z}$, so hat man ein zweistelliges Prädikat über $\mathbb{Z}$.

- Beispiel: Für $x^2 + y^2 = z^2$ mit den drei Variablen x, y und z kann man entsprechend $P(x, y, z)$ schreiben.

- Anmerkung: Eine „Aussage mit einer Variablen" wie $x > 5$ wird auch *Aussageform* oder *Aussagefunktion* genannt. Statt Grundmenge sagt man zu M auch *Einsetzungsbereich* oder *Individuenbereich*.

- Beispiele (aus der Umgangssprache, aus der Mathematik und aus einer Programmiersprache).

- Werden Prädikate statt Aussagen in Formeln der Aussagenlogik eingesetzt, entstehen Ausdrücke wie

  $$P(x, y) \wedge Q(x, y, z) \rightarrow P(x, x)$$

  oder

  $$A \vee P(x, y, z) \leftrightarrow Q(x, y, z, w)$$

  (Die Aussagenvariable A kann man auch als nullstelliges Prädikat auffassen.)

  Mit solchen und noch allgemeiner gebauten Formeln beschäftigt sich die Prädikatenlogik. (Beispielsweise können sogenannte Quantoren vorkommen.)

- Quantisierung

  Es sei $P(x)$ ein Prädikat.

  1. Die Aussage „$P(x)$ ist wahr *für alle* x aus der Grundmenge." wird

     $$\forall x P(x)$$

     geschrieben. Dabei heißt $\forall$ ***Allquantor***.
  2. Die Aussage „Es *existiert* (mindestens) *ein* x aus der Grundmenge, so daß $P(x)$ wahr ist." wird

     $$\exists x P(x)$$

     geschrieben. $\exists$ heißt ***Existenzquantor***.

- Bei einer endlichen Grundmenge gibt es für die Aussagen $\forall x P(x)$ und $\exists x P(x)$ äquivalente Schreibweisen ohne Quantoren.

- In einem Ausdruck der Art $\exists x \forall y\, P(x, y, z)$ heißen x und y ***gebundene Variablen*** und z ***freie Variable***. Sind alle Variablen gebunden, hat man eine Aussage.

- Beispiele

- Negation von Quantoren: Es gilt

  $$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

  und

  $$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x).$$

- Werden Quantoren geschachtelt, ist die Reihenfolge wichtig. Man vergleiche $\forall x \exists y\, [y > x]$ mit $\exists y \forall x\, [y > x]$, wobei $\mathbb{N}$ die Grundmenge sein soll.

- Beispiele für mathematische Sätze, die mit Quantoren formuliert sind, dabei soll $\mathbb{N}$ die Grundmenge sein.

  1. $\forall q\, \exists p\, \forall x, y\; [p > q \wedge (x, y > 1 \rightarrow xy \neq p)]$
  2. $\forall a, b, c, n\; [(a, b, c > 0 \wedge n > 2) \rightarrow a^n + b^n \neq c^n]$
  3. $\forall q\, \exists p\, \forall x, y\; [p > q \wedge (x, y > 1 \rightarrow (xy \neq p \wedge xy \neq p + 2))]$