

## Logik

### Zusammengesetzte Aussagen, Normalformen

- Wieviele zweistellige Verknüpfungen von Aussagen sind möglich? Kann man alle zweistelligen Verknüpfungen von Aussagen mit den fünf Junktoren  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$  und  $\leftrightarrow$  darstellen?
- Tabelle mit allen zweistelligen Verknüpfungen von Aussagen.
- Anmerkung: Neben den fünf Junktoren  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$  und  $\leftrightarrow$  sind noch weitere logische Operatoren gebräuchlich,
  1. das Ausschließende Oder:  $\oplus$  (engl.: exclusive or, XOR),
  2. der Sheffer-Operator:  $|$  (engl.: Sheffer stroke, NAND),
  3. der Peirce-Operator:  $\downarrow$  (engl.: Peirce arrow, NOR),

wobei NAND aus „not and“ gebildet wurde und NOR aus „not or“.

- Anmerkung: Man kann zeigen, daß alle zweistelligen Verknüpfungen von Aussagen mit einem einzigen Operator geschrieben werden können. Dies geht sowohl mit dem Sheffer- als auch mit dem Peirce-Operator.
- Anmerkung: Eine Wahrheitstafel mit 2 Aussagenvariablen hat 4 Zeilen. Eine Wahrheitstafel mit  $n$  Aussagenvariablen besteht aus  $2^n$  Zeilen.
- Zu einer aussagenlogischen Formel kann eine Wahrheitstafel aufgestellt werden. Umgekehrt sei nun eine Wahrheitstafel gegeben und eine „passende“ aussagenlogische Formel ist gesucht.
- Beispiel
- Wir betrachten zwei Wege, auf denen man systematisch von der Wahrheitstafel zur aussagenlogischen Formel kommt.
  1. Wir gehen von den Zeilen aus, die den Wert *wahr* haben. Es ergibt sich eine *Oder*-Verknüpfung von Teilformeln, die nur *Und*-Verknüpfungen (von Variablen oder negierten Variablen) enthalten.
  2. Wir gehen von den Zeilen mit dem Wert *falsch* aus. Es entsteht eine *Und*-Verknüpfung von Klammern, die nur *Oder*-Verknüpfungen enthalten.
- Durchführung der beiden Methoden an einem Beispiel.

- Definition

Man bezeichnet aussagenlogische Variablen und deren Negationen durch den Oberbegriff **Literale**.

- Definition (Disjunktive Normalform)

Als **disjunktive Normalform** (kurz: DNF) einer aussagenlogischen Formel  $\phi$  bezeichnet man eine Darstellung, in der Teilformeln durch *Oder* verknüpft werden, wobei in den Teilformeln nur *Und*-Verknüpfungen von Literalen vorkommen. D.h.

$$\phi = (\dots) \vee (\dots) \vee \dots \vee (\dots),$$

und die Klammern sind von der Bauart

$$(L_1 \wedge L_2 \wedge \dots \wedge L_n)$$

mit Literalen  $L_i$ .

- Definition (Konjunktive Normalform)

Eine **konjunktive Normalform** (kurz: KNF) liegt vor, wenn  $\phi$  eine *Und*-Verknüpfung von Teilformeln ist, die nur *Oder*-Verknüpfungen von Literalen enthalten, d.h.

$$\phi = (\dots) \wedge (\dots) \wedge \dots \wedge (\dots),$$

und die Klammern sind von der Form

$$(L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n)$$

mit Literalen  $L_i$ . Diese Teilformeln aus *Oder*-verknüpften Literalen heißen auch **Klauseln**.

- Satz

Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es eine äquivalente Darstellung in KNF und eine in DNF.

- Anmerkung: Da wir jede Formel  $\phi$  in KNF oder DNF schreiben können, folgt, daß für beliebiges  $\phi$  die Junktoren  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$  ausreichen. Durch weiteres Umformen kann man auch bei einer beliebigen Formel  $\phi$  mit einem einzigen Operator auskommen, wie wir es oben bereits für den Spezialfall zweistelliger Verknüpfungen von Aussagen erwähnt haben.