Logik

Aussagen, Wahrheitswerte, Junktoren

- Definition (Aussage, Wahrheitswerte)

  Unter einer ***Aussage*** verstehen wir ein sprachliches Gebilde, mit dem das Bestehen oder das Nichtbestehen eines Sachverhalts ausgedrückt wird.

  Besteht der Sachverhalt, so ist die Aussage ***wahr***, andernfalls ist sie ***falsch*** (Wahrheitswerte).

- Anmerkung:

  1. Für unsere Zwecke ist diese umgangssprachliche Definition ausreichend. Es gibt aber auch abstrakte Zugänge zur Logik.
  2. Das „sprachliche Gebilde“ muß nicht in einer natürlichen Sprache formuliert sein. Es kann sich z.B. auch um eine in der künstlichen Sprache der Mathematik aufgeschriebene Formel handeln oder um Code in einer Programmiersprache. Gerade diese Fälle sind für uns besonders interessant.
  3. Für die Wahrheitswerte verwendet man auch andere Bezeichnungen; gebräuchlich sind
     - wahr, w, true, t, 1,
     - falsch, f, false, f, 0.

- Beispiele für Aussagen.

  „Rom ist die Haupstadt von Italien.“ ist wahr.

  „Gießen liegt in Bayern.“ ist falsch.

  „7 ist eine Primzahl.“ ist wahr.

  „$10 > 3$“ ist wahr.

  „2 teilt 1001“ ist falsch.

  „Jede gerade Zahl größer 2 kann als Summe zweier Primzahlen dargestellt werden.“ ist eine Aussage, deren Wahrheitswert unbekannt ist.

- Beispiele für sprachliche Gebilde, die keine Aussagen sind.

  „Guten Tag!“

  „Wie spät ist es?“

  „Play it again, Sam!“

  „42“

  „$7 + 5^2 - 11$“

- Beispiel: Aussagen in einer Programmiersprache.
- Zusammengesetzte Aussagen.

  Ausgehend von Aussagen kann man neue Aussagen bilden, indem man

  1. „nicht“ davor schreibt (***Negation***: $\neg A$),
  2. „und“ zwischen zwei Aussagen schreibt (***Konjunktion***: $A \wedge B$),
  3. „oder“ zwischen zwei Aussagen schreibt (***Disjunktion***: $A \vee B$),
  4. „wenn“ vor die erste und „dann“ zwischen die erste und zweite Aussage schreibt (***Implikation***: $A \rightarrow B$),
  5. „genau dann, wenn“ zwischen zwei Aussagen schreibt (***Äquivalenz***: $A \leftrightarrow B$).

  Die Symbole $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ heißen ***Junktoren***. Bei einer Implikation $A \rightarrow B$ heißt A die *Prämisse* und B die *Konklusion*.

- Wahrheitstafel

  Die genaue Festlegung der Bedeutung der Junktoren geschieht mit einer ***Wahrheitstafel***.

- Atomare Aussagen

  Eine zusammengesetzte Aussage besteht aus Teilaussagen und Junktoren. Ist eine Aussage nicht zusammengesetzt, d.h. kann sie nicht weiter in Teilaussagen zerlegt werden, nennt man sie elementare oder ***atomare Aussage***.

- Aussagenvariablen

  Sind A und B bestimmte Aussagen mit bekannten Wahrheitswerten, so kann der Wahrheitswert einer aus A und B zusammengesetzten Aussage wie beispielsweise $A \vee B$ sofort angegeben werden.

  Die Buchstaben A, B, ... können aber auch ganz allgemein für Aussagen stehen, die nicht näher bestimmt sind, und deren Wahrheitswerte man somit nicht angeben kann. Dann sind A, B, ... ***Aussagenvariablen***, die die beiden Werte „wahr“ und „falsch“ annehmen können.

  Der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage hängt dann davon ab, mit welchen Wahrheitswerten die Aussagenvariablen belegt sind.

- Anmerkung: Eine Aussagenvariable wird auch ***boolsche Variable*** genannt (man verwendet oft x, y, ...); die Junktoren heißen dann ***boolsche Operatoren***. Ein Ausdruck aus boolschen Variablen und Operatoren wird dann als ***boolsche Formel*** bezeichnet. Zum Beispiel ist

  $$\phi = (\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{z})$$

  eine boolsche Formel. Hierbei steht $\overline{x}$ für $\neg x$.

- Anmerkung: Eine boolsche Formel heißt ***erfüllbar***, wenn es eine Belegung der boolschen Variablen mit 0 oder 1 so gibt, daß die gesamte Formel den Wert 1 erhält. Man spricht von dem ***Erfüllbarkeitsproblem*** (satisfiability problem, Abkürzung: SAT), wenn zu einer vorgegebenen Formel festgestellt werden soll, ob sie erfüllbar ist. Bei größeren Formeln kann diese Untersuchung sehr aufwendig sein. Es ist von sehr großer Bedeutung für die Informatik, wie schnell ein Algorithmus zur Überprüfung der Erfüllbarkeit prinzipiell sein kann.

- Beispiel: Welche der folgenden Formeln sind erfüllbar?

  1. $(\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{z})$
  2. $(\overline{x} \wedge y) \wedge (x \wedge \overline{z}) \wedge (x \vee (\overline{y} \wedge z))$
  3. $(x \vee \overline{x}) \rightarrow ((y \wedge \overline{y}) \vee (x \wedge y))$

- Definition (Tautologie)

  Eine zusammengesetzte Aussage, die bei jeder beliebigen Belegung der atomaren Aussagen mit Wahrheitswerten stets *wahr* ist, wird *allgemeingültig* oder eine ***Tautologie*** genannt.

- Beispiel

- Anmerkung: Wenn $A \rightarrow B$ eine Tautologie ist, schreibt man auch $A \Rightarrow B$. Entsprechend schreibt man $A \Leftrightarrow B$, wenn $A \leftrightarrow B$ eine Tautologie ist. Das hat folgenden Sinn: Trifft man auf die zusammengesetzte Aussage $A \rightarrow B$, kann man nicht wissen, ob sie wahr oder falsch ist, beides wäre möglich. Hingegen kann man bei der zusammengesetzten Aussage $A \Rightarrow B$ sicher sein, daß sie wahr ist. Diese Unterscheidung ist notwendig, wenn man über die Aussagenlogik sprechen will und korrekte Folgerungen aufschreiben möchte, die Formeln der Aussagenlogik zum Gegenstand haben. Zum Beispiel ist

  $$(A \rightarrow B) \Rightarrow ((\neg B) \rightarrow (\neg A))$$

  eine korrekte (wahre) Aussage über Aussagen.

  Entsprechend kann man begründen, warum es sinnvoll ist, zwischen $A \leftrightarrow B$ und $A \Leftrightarrow B$ zu unterscheiden.

  Manchmal versucht man den Unterschied auch sprachlich zu fassen und bezeichnet $A \rightarrow B$ als Subjunktion oder Konditional und $A \Rightarrow B$ als Implikation, sowie $A \leftrightarrow B$ als Bijunktion oder Bikonditional und $A \Leftrightarrow B$ als Äquivalenz.

- Definition (Kontradiktion)

  Eine zusammengesetzte Aussage, die bei jeder beliebigen Belegung der atomaren Aussagen mit Wahrheitswerten stets *falsch* ist, wird eine ***Kontradiktion*** genannt.

- Beispiel

- Ist $A \leftrightarrow B$ eine Tautologie, nennt man die — eventuell zusammengesetzten — Aussagen A und B ***logisch äquivalent***. Für alle möglichen Belegungen der in A und B vorkommenden atomaren Aussagen stimmen dabei die Wahrheitswerte von A und B überein.

  Mit solchen Tautologien kann man Gesetze der Aussagenlogik formulieren; dabei wird zu einem logischen Ausdruck ein logisch äquivalenter Ausdruck angegeben.

  Bei logisch äquivalenten Ausdrücken, also bei einer Tautologie $A \leftrightarrow B$, schreibt man auch $A \Leftrightarrow B$ oder $A = B$ oder $A \equiv B$.

- Satz (Einige Gesetze der Aussagenlogik)

  A, B und C seien Aussagenvariablen.

  1. ***Kommutativität*** bei Konjunktion und Disjunktion.
  $$\begin{aligned} A \wedge B &\equiv B \wedge A \\ A \vee B &\equiv B \vee A \end{aligned}$$
  2. ***Assoziativität*** bei Konjunktion und Disjunktion.
  $$\begin{aligned} (A \wedge B) \wedge C &\equiv A \wedge (B \wedge C) \\ (A \vee B) \vee C &\equiv A \vee (B \vee C) \end{aligned}$$
  3. ***Distributivität***
  $$\begin{aligned} A \wedge (B \vee C) &\equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\ A \vee (B \wedge C) &\equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \end{aligned}$$
  4. ***doppelte Verneinung***
  $$\neg(\neg A) \equiv A$$
  5. ***Kontraposition***
  $$A \to B \equiv (\neg B) \to (\neg A)$$
  6. ***Regeln von de Morgan*** bei der Negation einer Konjunktion bzw. Disjunktion.
  $$\begin{aligned} \neg(A \wedge B) &\equiv (\neg A) \vee (\neg B) \\ \neg(A \vee B) &\equiv (\neg A) \wedge (\neg B) \end{aligned}$$

- Beweis der Gesetze mit Wahrheitstafeln.