WOCHE 13

13.01.2011

1. Mehrdimensionale Integration

Bestimmen Sie die Integralformeln für Masse, Schwerpunkt und Hauptträgheitsmomente des durch

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := x^2 + y^2$$

definierten Paraboloids

$$V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y) \leq z \leq h\}$$

der Höhe h in

(a) kartesischen Koordinaten

(b) Zylinderkoordinaten

bzgl. aller Integrationsreihenfolgen und der Dichte $\rho = \rho(x,y,z) = \rho(r,\varphi,z)$.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
&\int_V g(x,y,z)\ dV \\
&= \int_0^h \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} g\ dx\ dy\ dz = \int_0^h \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} g\ dy\ dx\ dz \\
&= \int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} \int_{y^2}^{h} \int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} g\ dx\ dz\ dy = \int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} \int_{x^2}^{h} \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-y^2}} g\ dy\ dz\ dx \\
&= \int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} \int_{-\sqrt{h-y^2}}^{\sqrt{h-y^2}} \int_{x^2+y^2}^{h} g\ dz\ dx\ dy = \int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} \int_{-\sqrt{h-x^2}}^{\sqrt{h-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{h} g\ dz\ dy\ dx\ .
\end{aligned}$$

Um die Masse m zu erhalten, setzt man $g(x,y,z) := \rho(x,y,z)$, für x_S, y_S, z_S setzt man

$$\begin{aligned}
g(x,y,z) &:= \frac{1}{m}\rho(x,y,z) \cdot x\ , \\
g(x,y,z) &:= \frac{1}{m}\rho(x,y,z) \cdot y\ , \\
g(x,y,z) &:= \frac{1}{m}\rho(x,y,z) \cdot z\ ,
\end{aligned}$$

und für I_x, I_y, I_z setzt man

$$\begin{aligned}
g(x,y,z) &:= \rho(x,y,z) \cdot (y^2 + z^2)\ , \\
g(x,y,z) &:= \rho(x,y,z) \cdot (x^2 + z^2)\ , \\
g(x,y,z) &:= \rho(x,y,z) \cdot (x^2 + y^2)\ .
\end{aligned}$$

(b) Die Transformation in Zylinderkoordinaten ist gegeben durch

$$x = r \cdot \cos\varphi \ , \qquad y = r \cdot \sin\varphi \ , \qquad z = z \ .$$

die Funktionaldeterminante ist r. In Zylinderkoordinaten gilt nun

$$\begin{aligned}
&\int_V g(r,\varphi,z)\ dV \\
&= \int_0^h \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^{2\pi} g \cdot r\ d\varphi\ dr\ dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} g \cdot r\ dr\ d\varphi\ dz \\
&= \int_0^{\sqrt{h}} \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^h g \cdot r\ dz\ d\varphi\ dr = \int_0^{\sqrt{h}} \int_{r^2}^h \int_0^{2\pi} g \cdot r\ d\varphi\ dz\ dr \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{h}} \int_{r^2}^h g \cdot r\ dz\ dr\ d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^{\sqrt{z}} g \cdot r\ dr\ dz\ d\varphi \ .
\end{aligned}$$

Um die Masse m zu erhalten, setzt man $g(r,\varphi,z) := \rho(r,\varphi,z)$, für x_S, y_S, z_S setzt man

$$\begin{aligned}
g(r,\varphi,z) &:= \frac{1}{m}\rho(r,\varphi,z) \cdot r \cdot \cos\varphi \ , \\
g(r,\varphi,z) &:= \frac{1}{m}\rho(r,\varphi,z) \cdot r \cdot \sin\varphi \ , \\
g(r,\varphi,z) &:= \frac{1}{m}\rho(r,\varphi,z) \cdot z \ ,
\end{aligned}$$

und für I_x, I_y, I_z setzt man

$$\begin{aligned}
g(r,\varphi,z) &:= \rho(r,\varphi,z) \cdot (r^2 \cdot \sin^2\varphi + z^2) \ , \\
g(r,\varphi,z) &:= \rho(r,\varphi,z) \cdot (r \cdot \cos^2\varphi + z^2) \ , \\
g(r,\varphi,z) &:= \rho(r,\varphi,z) \cdot r^2 \ .
\end{aligned}$$

2. Aufgaben für den 20.01.11

(a) Taylor-Reihen: Bestimmen Sie die Taylor-Reihe von
   (i) $f(x) := \sin(x)$ an der Stelle π.
   (ii) $g(x) := x^4$ an der Stelle 0.
   (iii) $h(x) := \frac{1}{x^2}$ an der Stelle -1.

(b) Restglied-Abschätzung: Schätzen Sie $R_n(1)$ für die obigen Beispiele.