# Woche 11

16.12.2010

**1. Mehrdimensionale Integration**

Bestimmen Sie

$$\int_F e^{x+y}\ dF$$

für

$$F := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x-1 \leq y \leq -x+1,\ x-1 \leq y \leq x+1\} \subseteq \mathbb{R}^2 \ .$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_F e^{x+y}\ dF &= \int_{-1}^{1}\int_{u(x)}^{o(x)} e^{x+y}\ dy\ dx \\
&= \int_{-1}^{0}\int_{-x-1}^{x+1} e^{x+y}\ dy\ dx + \int_{0}^{1}\int_{x-1}^{-x+1} e^{x+y}\ dy\ dx \\
&= \int_{-1}^{0} \left[e^{x+y}\right]_{-x-1}^{x+1}\ dx + \int_{0}^{1} \left[e^{x+y}\right]_{x-1}^{-x+1}\ dx \\
&= \int_{-1}^{0} e^{2x+1} - e^{-1}\ dx + \int_{0}^{1} e^{1} - e^{2x-1}\ dx \\
&= \left[\frac{1}{2}e^{2x+1} - e^{-1}x\right\}\Big]_{-1}^{0} + \left[e^{1}x - \frac{1}{2}e^{2x-1}\right]_{0}^{1} \\
&= (\frac{1}{2}e^{1} - 0) - (\frac{1}{2}e^{-1} + e^{-1}) + (e^{1} - \frac{1}{2}e^{1}) - (0 - \frac{1}{2}e^{-1}) = e^{1} - e^{-1} \ .
\end{aligned}$$

Natürlich kann man auch zuerst nach $x$ und dann nach $y$ integrieren; hierbei müssen die inneren Integrationsgrenzen aber von $y$ abhängen.

**2. Inhomogene Flächen**

Bestimmen Sie die Masse der auf dem Intervall $[0,2]$ durch die Funktionen

$$f_o(x) := 1 \ , \qquad\qquad f_u(x) := 0$$

definierten Fläche für die Dichte

$$\rho_1(x,y) := xy^2 \ .$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
m = \int_F \rho_1(x,y)\ dF &= \int_0^2\int_0^1 xy^2\ dy\ dx = \int_0^2 [\frac{1}{3}xy^3]_0^1\ dx \\
&= \int_0^2 \frac{1}{3}x\ dx = [\frac{1}{6}x^2]_0^2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \ .
\end{aligned}$$

**Achtung:** Es gilt

$$\int_0^2 \rho_1(x,y)(f_o(x) - f_u(x))\ dx = \int_0^2 xy^2\ dx = [\frac{1}{2}x^2y^2]_0^2 = 2y^2 \neq m \ .$$

**3. Aufgaben für den 25.11.10**

(a) Inhomogene Flächen: Bestimmen Sie Masse, Schwerpunkt und Trägheitsmomente der auf dem Intervall $[0, 2]$ durch die Funktionen

$$f_o(x) := 1 \ , \qquad f_u(x) := 0$$

definierten Fläche für die Dichten

$$\rho_1(x, y) := xy^2 \ , \qquad \rho_2(x, y) := x \ , \qquad \rho_3(x, y) := y^2 \ .$$

(b) Mehrdimensionale Integration: Bestimmen Sie die Integralformeln für Masse, Schwerpunkt und Hauptträgheitsmomente des durch

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) := x^2 + y^2$$

definierten Paraboloids

$$P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y) \leq z \leq h\}$$

der Höhe $h$ in

(i) kartesischen Koordinaten

(ii) Zylinderkoordinaten

bzgl. aller Integrationsreihenfolgen und der Dichte $\rho(x, y, z)$.