Woche 10

09.12.2010

1. Ausgleichsgeraden und -parabeln

Bestimmen Sie

(i) die Ausgleichsgerade

(ii) die Ausgleichsparabel

für die Punkte

$$(-10;20)\ , \qquad (-5;-10)\ , \qquad (5;-10)\ , \qquad (10;20)\ .$$

Wir legen zunächst eine Tabelle mit allen benötigten Werten an:

	x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i^2y_i$
1	-10	20	-200	100	-1000	10000	2000
2	-5	-10	50	25	-125	625	-250
3	5	-10	-50	25	125	625	-250
4	10	20	200	100	1000	10000	2000
$\sum$	0	20	0	250	0	21250	3500

Insbesondere gilt

$$\bar{x} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i = 0\ , \qquad \bar{y} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} y_i = 5\ .$$

(i) Der Ansatz $y = ax + b$ liefert

$$a = \frac{0 - 4\cdot 0\cdot 5}{250 - 4\cdot 0^2} = 0\ , \qquad b = 5 - 0\cdot\frac{0 - 4\cdot 0\cdot 5}{250 - 4\cdot 0^2} = 5\ ,$$

also

$$y = 5\ .$$

(ii) Der Ansatz $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
4\cdot a_0 + (\sum_{i=1}^4 x_i)\cdot a_1 + (\sum_{i=1}^4 x_i^2)\cdot a_2 &= \sum_{i=1}^4 y_i\\
(\sum_{i=1}^4 x_i)\cdot a_0 + (\sum_{i=1}^4 x_i^2)\cdot a_1 + (\sum_{i=1}^4 x_i^3)\cdot a_2 &= \sum_{i=1}^4 x_iy_i\\
(\sum_{i=1}^4 x_i^2)\cdot a_0 + (\sum_{i=1}^4 x_i^3)\cdot a_1 + (\sum_{i=1}^4 x_i^4)\cdot a_2 &= \sum_{i=1}^4 x_i^2y
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
4\cdot a_0 + \quad 0\cdot a_1 + \quad 250\cdot a_2 &= 20\\
0\cdot a_0 + 250\cdot a_1 + \quad 0\cdot a_2 &= 0\\
250\cdot a_0 + \quad 0\cdot a_1 + 21250\cdot a_2 &= 3500
\end{aligned}$$

mit Lösung

$$a_2 = 0{,}4\ , \qquad a_1 = 0\ , \qquad a_0 = -20\ ,$$

also

$$y = 0{,}4x^2 - 20\ .$$

2. Tangentialebenen

Bestimmen Sie die Tangentialebene $T(x, y)$ der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) := e^{x+y-2}$$

im Punkt $(1, 1)$ und berechnen Sie $T(0, 0)$.

Für die ersten Ableitungen gilt

$$f_x = e^{x+y-2}\ , \qquad\qquad f_y = e^{x+y-2}\ .$$

Das totale Differential liefert

$$dz = f_x(1, 1)\ dx + f_y(1, 1)\ dy = e^{1+1-2}\ dx + e^{1+1-2}\ dy = dx + dy\ .$$

Integration auf beiden Seiten liefert

$$z + c_1 = \int dz = \int dx + \int dy = x + c_2 + y + c_3\ .$$

Zusammenfassen der Konstanten liefert

$$z = x + y + d\ .$$

Da der Punkt $(1, 1, f(1, 1)) = (1, 1, 1)$ in der Tangentialebene liegt, ergibt sich

$$d = 1 - 1 - 1 = -1\ .$$

Es folgt

$$T(x, y) = z = x + y - 1\ .$$

Alternativ erhält man die Gleichung durch

$$T(x, y) = f(1, 1) + f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1) = 1 + 1 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 1) = x + y - 1\ .$$

Die Tangentialgerade in x-Richtung ist

$$g_x(x) = T(x, 1) = x + 1 - 1 = x$$

und die Tangentialgerade in y-Richtung ist

$$g_y(y) = T(1, y) = 1 + y - 1 = y\ .$$

Es ergibt sich sofort

$$T(0, 0) = -1\ .$$

Dieser Wert lässt sich auch ohne die explizite Formel für $T(x, y)$ bestimmen: Es gilt

$$T(0, 0) = f(1, 1) + f_x(1, 1) \cdot \Delta x + f_y(1, 1) \cdot \Delta y = 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = -1\ .$$

3. Fehlerrechnung

Bestimmen Sie den maximalen Absolut- und Relativfehler für die Durchschnittsgeschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t}$$

für die Messwerte

$$s = 300m \ , \qquad t = 6s$$

bei Messungenauigkeiten von

$$\Delta s = \pm 1cm \ , \qquad \Delta t = \pm 0,01s \ .$$

Es gilt

$$v_s = \frac{1}{t} \ , \qquad v_t = -\frac{s}{t^2} \ .$$

Für den maximalen Absolutfehler gilt somit

$$\begin{aligned} |\Delta v| &= |v_s(300m, 6s)| \cdot |\Delta s| + |v_t(300m, 6s)| \cdot |\Delta t| \\ &= \frac{1}{6s} \cdot 0,01m + \frac{300m}{36s^2} \cdot 0,01s = \frac{17}{200}\frac{m}{s} \ . \end{aligned}$$

Fürden maximalen Relativfehler ergibt sich

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{17}{200}\frac{m}{s} : 300\frac{m}{s} = \frac{17}{60000} \sim 0,000283 = 0,0283\% \ .$$

4. Aufgaben für den 16.12.10

(a) Mehrdimensionale Integration: Bestimmen Sie

$$\int_F e^{x+y} \, dF$$

für

$$F := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x - 1 \leq y \leq -x + 1, \ x - 1 \leq y \leq x + 1\} \subseteq \mathbb{R}^2 \ .$$

(b) Inhomogene Flächen: Bestimmen Sie Masse, Schwerpunkt und Trägheitsmomente der auf dem Intervall $[0, 2]$ durch die Funktionen

$$f_o(x) := 1 \ , \qquad f_u(x) := 0$$

definierten Fläche für die Dichten

$$\rho_1(x, y) := xy^2 \ , \qquad \rho_2(x, y) := x \ , \qquad \rho_3(x, y) := y^2 \ .$$