Woche 9

02.12.2010

1. Extrema

Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := 2x^2 + 2y^2 - 6x - 6y + 5\ .$$

Bestimmen Sie zudem deren globales Minimum auf der Menge

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1],\ y \in [-1,1],\ y \geq x\} \subseteq \mathbb{R}^2\ .$$

(a) Für die ersten Ableitungen gilt

$$f_x = 2x - 6\ , \qquad f_y = 2y - 6\ .$$

Für die zweiten Ableitungen gilt

$$f_{xx} = 2\ , \qquad f_{yy} = 2\ , \qquad f_{xy} = 0\ .$$

I. Die notwendige Bedingung

$$f_x(a,b) = 0\ , \qquad f_y(a,b) = 0$$

liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2a - 6 &= 0 \\ 2b - 6 &= 0\ , \end{aligned}$$

also $a = 1,5 = b$. Der Funktionswert an der Stelle $(3/2; 3/2)$ ist also ein mögliches Extremum.

II. Wir überprüfen, ob die hinreichende Bedingung an der Stelle $(3/2; 3/2)$ erfüllt ist: Es gilt

$$f_{xx}(3/2;3/2) \cdot f_{yy}(3/2;3/2) - (f_{xy}(3/2;3/2))^2 = 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0\ .$$

Der Funktionswert an der Stelle $(3/2; 3/2)$ ist also ein Extremum.

III. Wir bestimmen Art und Wert des Extremums: Wegen

$$f_{xx}(3/2;3/2) = 2 > 0$$

ist der Funktionswert

$$f(3/2;3/2) = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \cdot \frac{3}{2} - 6 \cdot \frac{3}{2} + 5 = -4$$

an der Stelle $(3/2; 3/2)$ ein Minimum.

(b) Wegen $(3/2; 3/2) \notin M$ gibt es im Inneren von M keine lokalenn Extremstellen, folglich wird das globale Minimum auf dem Rand der Fläche M angenommen. Hierzu untersuchen wir die 3 Randwege zwischen den Eckpunkten

$$E_1 := (-1; -1)\ , \qquad E_2 := (-1; 1)\ , \qquad E_3 := (1,1)\ .$$

I. Der Weg von E_1 nach E_2 ist gegeben durch

$$w_1 : [0,2] \to \mathbb{R}^2,\ w_1(\lambda) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Entlang dieses Weges ergibt sich also die Funktion

$$f_1(\lambda) := f(w_1(\lambda)) = f(-1; -1+\lambda) = 2\lambda^2 - 10\lambda + 21 \ .$$

Wegen

$$f_1'(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ 4\lambda - 10 = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda = 10/4 > 2$$

gibt es im Inneren von $[0; 2]$ keine lokale Extremstelle. Das globale Minimum wird also auf dem Rand angenommen. Es gilt

$$f_1(0) = 21 \ , \qquad\qquad f_1(2) = 9 \ .$$

II. Der Weg von E_2 nach E_3 ist gegeben durch

$$w_2 : [0,2] \to \mathbb{R}^2,\ w_1(\lambda) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Entlang dieses Weges ergibt sich also die Funktion

$$f_2(\lambda) := f(w_2(\lambda)) = f(-1+\lambda; 1) = 2\lambda^2 - 10\lambda + 9 \ .$$

Wegen

$$f_2'(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ 4\lambda - 10 = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda = 10/4 > 2$$

gibt es im Inneren von $[0; 2]$ keine lokale Extremstelle. Das globale Minimum wird also auf dem Rand angenommen. Es gilt

$$f_2(0) = 9 \ , \qquad\qquad f_2(2) = -3 \ .$$

III. Der Weg von E_3 nach E_1 ist gegeben durch

$$w_3 : [0,2] \to \mathbb{R}^2,\ w_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \ .$$

Entlang dieses Weges ergibt sich also die Funktion

$$f_3(\lambda) := f(w_3(\lambda)) = f(1-\lambda; 1-\lambda) = 4\lambda^2 + 4\lambda - 3 \ .$$

Wegen

$$f_3'(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ 8\lambda + 4 = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda = -\frac{1}{2} < 0$$

gibt es im Inneren von $[0; 2]$ keine lokale Extremstelle. Das globale Minimum wird also auf dem Rand angenommen. Es gilt

$$f_3(0) = -3 \ , \qquad\qquad f_2(2) = 21 \ .$$

Der kleinste Funktionswert an den drei Eckpunkten ist also -3; dies ist somit das globale Minimum, das an der Stelle $(1; 1)$ angenommen.

2. Aufgaben für den 09.12.10

(a) Tangentialebenen: Bestimmen Sie die Tangentialebene $T(x,y)$ der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := e^{x+y-2}$$

im Punkt $(1,1)$ und berechnen Sie $T(0,0)$.

(b) Ausgleichsgeraden und -parabeln: Bestimmen Sie

(i) die Ausgleichsgerade

(ii) die Ausgleichsparabel

für die Punkte

$$(-10;20)\ , \qquad (-5;-10)\ , \qquad (5;-10)\ , \qquad (10;20)\ .$$

(c) Fehlerrechnung: Bestimmen Sie den maximalen Absolut- und Relativfehler für die Durchschnittsgeschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t}$$

für die Messwerte

$$s = 300m\ , \qquad t = 6s$$

bei Messungenauigkeiten von

$$\Delta s = \pm 1cm\ , \qquad \Delta t = \pm 0,01s\ .$$

(d) Inhomogene Flächen: Bestimmen Sie Masse, Schwerpunkt und Trägheitsmomente der auf dem Intervall $[0,2]$ durch die Funktionen

$$f_o(x) := 1\ , \qquad f_u(x) := 0$$

definierten Fläche für die Dichten

$$\rho_1(x,y) := xy^2\ , \qquad \rho_2(x,y) := x\ , \qquad \rho_3(x,y) := y^2\ .$$