Woche 8

25.11.2010

1. Mehrdimensionale Ableitungen

Bestimmen Sie alle Ableitungen bis zur 2. Ordnung der Funktion

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ , \qquad h(y_1, y_2, y_3) := \cos(y_1^3 y_2^2 y_3) \cdot \sqrt{\arctan(e)}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
h_{y_1} &= -\sqrt{\arctan(e)} \cdot \sin(y_1^3 y_2^2 y_3) \cdot 3y_1^2 y_2^2 y_3 \ , \\
h_{y_2} &= -\sqrt{\arctan(e)} \cdot \sin(y_1^3 y_2^2 y_3) \cdot 2y_1^3 y_2 y_3 \ , \\
h_{y_3} &= -\sqrt{\arctan(e)} \cdot \sin(y_1^3 y_2^2 y_3) \cdot y_1^3 y_2^2 \ .
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
h_{y_1 y_1} &= -\sqrt{\arctan(e)} \cdot 3y_2^2 y_3 \cdot \left(\cos(y_1^3 y_2^2 y_3) \cdot 3y_1^2 y_2^2 y_3 \cdot y_1^2 + \sin(y_1^3 y_2^2 y_3) \cdot 2y_1\right) \ , \\
h_{y_1 y_2} &= -\sqrt{\arctan(e)} \cdot 3y_1^2 y_3 \cdot \left(\cos(y_1^3 y_2^2 y_3) \cdot 2y_1^3 y_2 y_3 \cdot y_2^2 + \sin(y_1^3 y_2^2 y_3) \cdot 2y_2\right) \ , \\
h_{y_1 y_3} &= -\sqrt{\arctan(e)} \cdot 3y_1^2 y_2^2 \cdot \left(\cos(y_1^3 y_2^2 y_3) \cdot y_1^3 y_2^2 \cdot y_3 + \sin(y_1^3 y_2^2 y_3) \cdot 1\right) \ , \\
h_{y_2 y_2} &= -\sqrt{\arctan(e)} \cdot 2y_1^3 y_3 \cdot \left(\cos(y_1^3 y_2^2 y_3) \cdot 2y_1^3 y_2 y_3 \cdot y_2 + \sin(y_1^3 y_2^2 y_3) \cdot 1\right) \ , \\
h_{y_2 y_3} &= -\sqrt{\arctan(e)} \cdot 2y_1^3 y_2 \cdot \left(\cos(y_1^3 y_2^2 y_3) \cdot y_1^3 y_2^2 \cdot y_3 + \sin(y_1^3 y_2^2 y_3) \cdot 1\right) \ , \\
h_{y_3 y_3} &= -\sqrt{\arctan(e)} \cdot y_1^3 y_2^2 \cdot \cos(y_1^3 y_2^2 y_3) \cdot y_1^3 y_2^2 \ .
\end{aligned}$$

Die fehlenden Ableitungen erhält man mit dem Satz von Schwarz.

2. Richtungsableitungen

Bestimmen Sie für $a \in [0, 2\pi]$ die Richtungsableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \ \mathbb{R}, \ f(x, y) := x^2 + y^2$$

an der Stelle $(\sin(a), \cos(a))$ in Richtung $v := (-\cos(a), \sin(a))$.

Für eine Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto g(x, y)$ ist die Richtungsableitung im Punkt (x_0, y_0) in Richtung $v = (v_1, v_2)$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
r_v(x_0, y_0) &= \begin{pmatrix} g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \\
&= \frac{g_x(x_0, y_0) \cdot v_1 + g_y(x_0, y_0) \cdot v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \ .
\end{aligned}$$

Wegen $f_x = 2x, \ f_y = 2y$ und $\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{\cos^2(a) + \sin^2(a)} = 1$ gilt somit

$$\begin{aligned}
f_v(\sin(a), \cos(a)) &= f_x(\sin(a), \cos(a)) \cdot (-\cos(a)) + f_y(\sin(a), \cos(a)) \cdot \sin(a) \\
&= 2 \cdot \sin(a) \cdot (-\cos(a)) + 2 \cdot \cos(a) \cdot \sin(a) = 0 \ .
\end{aligned}$$

3. Aufgaben für den 02.12.10

(a) Extrema: Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := 2x^2 + 2y^2 - 6x - 6y + 5\ .$$

Bestimmen Sie zudem deren globales Minimum auf der Menge

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1],\ y \in [-1,1],\ y \geq x\} \subseteq \mathbb{R}^2\ .$$

(b) Tangentialebenen: Bestimmen Sie die Tangentialebene $T(x,y)$ der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := e^{x+y-2}$$

im Punkt $(1,1)$ und berechnen Sie $T(0,0)$.

(c) Ausgleichsgeraden: Bestimmen Sie die Ausgleichsgerade für die Punkte

$$(-10;20)\ , \qquad (-5;-10)\ , \qquad (5;-10)\ , \qquad (10;20)\ .$$

(d) Inhomogene Flächen: Bestimmen Sie Masse, Schwerpunkt und Trägheitsmomente der auf dem Intervall $[0,2]$ durch die Funktionen

$$f_o(x) := 1\ , \qquad f_u(x) := 0$$

definierten Fläche für die Dichten

$$\rho_1(x,y) := xy^2\ , \qquad \rho_2(x,y) := x\ , \qquad \rho_3(x,y) := y^2\ .$$