WOCHE 7

18.11.2010

1. Mehrdimensionale Ableitungen

Bestimmen Sie alle Ableitungen bis zur 2. Ordnung der Funktion

(a) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2, x_3, x_3) := (x_1^2 + 2x_1 + 3) \cdot e^{x_2} \cdot \sin(x_3) \cdot \ln|x_4|.$

Es gilt

$$\begin{aligned}
f_{x_1} &= (2x_1 + 2) \cdot e^{x_2} \cdot \sin(x_3) \cdot \ln|x_4| \ ,\\
f_{x_2} &= (x_1^2 + 2x_1 + 3) \cdot e^{x_2} \cdot \sin(x_3) \cdot \ln|x_4| \ ,\\
f_{x_3} &= (x_1^2 + 2x_1 + 3) \cdot e^{x_2} \cdot \cos(x_3) \cdot \ln|x_4| \ ,\\
f_{x_4} &= (x_1^2 + 2x_1 + 3) \cdot e^{x_2} \cdot \sin(x_3) \cdot \frac{1}{x_4} \ .
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
f_{x_1x_1} &= 2x_1 \cdot e^{x_2} \cdot \sin(x_3) \cdot \ln|x_4| \ ,\\
f_{x_1x_2} &= (2x_1 + 2) \cdot e^{x_2} \cdot \sin(x_3) \cdot \ln|x_4| \ ,\\
f_{x_1x_3} &= (2x_1 + 2) \cdot e^{x_2} \cdot \cos(x_3) \cdot \ln|x_4| \ ,\\
f_{x_1x_4} &= (2x_1 + 2) \cdot e^{x_2} \cdot \sin(x_3) \cdot \frac{1}{x_4} \ ,\\
f_{x_2x_2} &= (x_1^2 + 2x_1 + 3) \cdot e^{x_2} \cdot \sin(x_3) \cdot \ln|x_4| \ ,\\
f_{x_2x_3} &= (x_1^2 + 2x_1 + 3) \cdot e^{x_2} \cdot \cos(x_3) \cdot \ln|x_4| \ ,\\
f_{x_2x_4} &= (x_1^2 + 2x_1 + 3) \cdot e^{x_2} \cdot \sin(x_3) \cdot \ln\frac{1}{x_4} \ ,\\
f_{x_3x_3} &= -(x_1^2 + 2x_1 + 3) \cdot e^{x_2} \cdot \sin(x_3) \cdot \ln|x_4| \ ,\\
f_{x_3x_4} &= (x_1^2 + 2x_1 + 3) \cdot e^{x_2} \cdot \cos(x_3) \cdot \ln\frac{1}{x^4} \ ,\\
f_{x_4x_4} &= -(x_1^2 + 2x_1 + 3) \cdot e^{x_2} \cdot \sin(x_3) \cdot \frac{1}{x_4^2} \ .
\end{aligned}$$

Die fehlenden Ableitungen erhält man mit Hilfe des Satzes von Schwarz.

(b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ g(z_1, z_2, z_3) := e^{z_1+z_2} \cdot \sin(z_1z_3) \cdot z_3.$

Es gilt

$$\begin{aligned}
g_{z_1} &= e^{z_1+z_2} \cdot \sin(z_1z_3) \cdot z_3 + e^{z_1+z_2} \cdot \cos(z_1z_3) \cdot z_3 \cdot z_3\\
&= e^{z_1+z_2} \cdot z_3 \cdot (\sin(z_1z_3) + \cos(z_1z_3) \cdot z_3) \ ,\\
g_{z_2} &= e^{z_1+z_2} \cdot \sin(z_1z_3) \cdot z_3 \ ,\\
g_{z_3} &= e^{z_1+z_2} \cdot (\cos(z_1z_3) \cdot z_1z_3 + \sin(z_1z_3)) \ .
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
g_{z_1z_1} &= e^{z_1+z_2} \cdot z_3 \cdot (\sin(z_1z_3) + \cos(z_1z_3) \cdot z_3)\\
&\qquad + e^{z_1+z_2} \cdot z_3 \cdot (\cos(z_1z_3) \cdot z_3 - \sin(z_1z_3) \cdot z_3 \cdot z_3)\\
&= e^{z_1+z_2} \cdot z_3 \cdot (\sin(z_1z_3)(1 - z_3^2) + 2\cos(z_1z_3) \cdot z_3) \ ,\\
g_{z_1z_2} &= e^{z_1+z_2} \cdot z_3 \cdot (\sin(z_1z_3) + \cos(z_1z_3) \cdot z_3) \ ,\\
g_{z_1z_3} &= e^{z_1+z_2} \cdot ((\sin(z_1z_3) + \cos(z_1z_3) \cdot z_3) + z_3 \cdot (\cos(z_1z_3) \cdot z_1 - \sin(z_1z_3) \cdot z_1 \cdot z_3))\\
&= e^{z_1+z_2} \cdot (\sin(z_1z_3)(1 - z_1 \cdot z_3^2) + \cos(z_1z_3)(z_3 + z_1z_3)) \ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{z_2z_2} &= e^{z_1+z_2} \cdot \sin(z_1z_3) \cdot z_3 \ , \\
g_{z_2z_3} &= e^{z_1+z_2} \cdot (\cos(z_1z_3) \cdot z_1z_3 + \sin(z_1z_3)) \ , \\
g_{z_3z_3} &= e^{z_1+z_2} \cdot (-\sin(z_1z_3) \cdot z_1 \cdot z_1z_3 + \cos(z_1z_3) \cdot z_1 + \cos(z_1z_3) \cdot z_1) \\
&= e^{z_1+z_2} \cdot (-\sin(z_1z_3) \cdot z_1^2z_3 + 2\cos(z_1z_3) \cdot z_1) \ .
\end{aligned}$$

Die fehlenden Ableitungen erhält man mit Hilfe des Satzes von Schwarz.

2. Aufgaben für den 25.11.10

(a) Mehrdimensionale Ableitungen: Bestimmen Sie alle Ableitungen bis zur 2. Ordnung der Funktion

$$h : \mathbb{R}^3 \to 3 \ , \qquad h(y_1, y_2, y_3) := \cos(y_1^3y_2^2y_3) \cdot \sqrt{\arctan(e)}.$$

(b) Richtungsableitungen: Bestimmen Sie für $a \in [0, 2\pi]$ die Richtungsableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \ \mathbb{R}, \ f(x, y) := x^2 + y^2$$

an der Stelle $(\sin(a), \cos(a))$ in Richtung $(-\cos(a), \sin(a))$.

(c) Extrema: Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ f(x, y) := 2x^2 + 2y^2 - 6x - 6y + 5 \ .$$

Bestimmen Sie zudem deren globales Minimum auf der Menge

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1], \ y \in [-1, 1], \ y \geq x\} \subseteq \mathbb{R}^2 \ .$$

(d) Inhomogene Flächen: Bestimmen Sie Masse, Schwerpunkt und Trägheitsmomente der auf dem Intervall $[0, 2]$ durch die Funktionen

$$f_o(x) := 1 \ , \qquad f_u(x) := 0$$

definierten Fläche für die Dichten

$$\rho_1(x, y) := xy^2 \ , \qquad \rho_2(x, y) := x \ , \qquad \rho_3(x, y) := y^2 \ .$$