Woche 6

11.11.2010

1. **Rotationssymmetrische Körper**

   Bestimmen Sie Volumen und Schwerpunkt des Körpers, der entsteht, wenn die auf dem Intervall $I := [0, 2]$ definierte Funktion
   $$f(x) := x^2 - 4$$

   (a) um die x-Achse rotiert. Bestimmen Sie in diesem Fall auch das Trägheitsmoment I_x und das Trägheitsmoment bei Rotation des Körpers um die durch $y = 10$ definierte Achse.

   Es gilt
   $$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 (f(x))^2 \, dx = \pi \int x^4 - 8x^2 + 16 \, dx \\ &= \pi \cdot \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x\right]_0^2 = \pi \cdot \left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32\right) = 17\frac{1}{15}\pi \approx 53,6 \end{aligned}$$
   und
   $$\begin{aligned} x_S &= \frac{\pi}{V} \int_0^2 x \cdot (f(x))^2 \, dx = \frac{\pi}{V} \int_0^2 x^5 - 8x^3 + 16x \, dx \\ &= \frac{\pi}{V} \cdot \left[\frac{1}{6}x^6 - 2x^4 + 8x^2\right]_0^2 = \frac{\pi}{V} \cdot 10\frac{2}{3} = 0,625 \ . \end{aligned}$$
   Des Weiteren gilt
   $$\begin{aligned} I_x &= \frac{\pi}{2} \int_0^2 (f(x))^4 \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^2 x^8 - 16x^6 + 96x^4 - 256x^2 + 256 \, dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{9}x^9 - \frac{16}{7}x^7 + \frac{96}{5}x^5 - \frac{256}{3}x^3 + 256x\right]_0^2 \approx 326,81 \ . \end{aligned}$$
   Mit dem Satz von Steiner folgt nun
   $$I = I_x + a^2 \cdot m = 326,81 + 100 \cdot 17\frac{1}{15}\pi \approx 5730 \ .$$

   (b) um die y-Achse rotiert.

   Löst man $y := x^2 - 4$ nach x auf, so ergibt sich
   $$g(y) := x = \sqrt{y + 4}$$
   auf dem Intervall $[-4, 0]$. Nun gilt
   $$V = \pi \int_{-4}^0 (g(y))^2 \, dy = \pi \int_{-4}^0 y + 4 \, dy = \pi \cdot \left[\frac{1}{2}y^2 + 4y\right]_{-4}^0 = 8\pi$$
   und
   $$y_S = \frac{\pi}{V} \int_{-4}^0 y \cdot (g(y))^2 \, dy = \frac{1}{8} \int_{-4}^0 y^2 + 4y \, dy = \frac{1}{8} \cdot \left[\frac{1}{3}y^3 + 2y^2\right]_{-4}^0 = -1\frac{1}{3} \ .$$
   Des Weiteren gilt
   $$\begin{aligned} I_y &= \frac{\pi}{2} \int_{-4}^0 (g(y))^4 \, dy = \frac{\pi}{2} \int_{-4}^0 y^2 + 8y + 16 \, dy \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{3}y^3 + 4y^2 + 16y\right]_{-4}^0 = \frac{32}{3}\pi \ . \end{aligned}$$
   Mit dem Satz von Steiner folgt nun
   $$I = I_y + a^2 \cdot m = \frac{32}{3}\pi + 25 \cdot 8\pi = 210\frac{2}{3}\pi \ .$$

2. Lage von Funktionen

Bestimmen Sie, in welchen Intervallen die Funktion

$$f(x) := x^3$$

oberhalb der Funktion

$$g(x) := x$$

liegt.

Zunächst Bestimmen wir die Schnittpunkte von $f(x)$ und $g(x)$: Der Ansatz $f(x) = g(x)$ führt zu der Gleichung

$$\cdot(x^2 - 1) = x^3 - x = 0 \ ,$$

womit sich die Werte $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$ ergeben. Nun Berechnen wir Funktionswerte zwischen diesen Stellen:

$$f(-2) = -8 < -2 = g(-2) \ , \qquad f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8} > -\frac{1}{2} = g(-\frac{1}{2}) \ ,$$
$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} < \frac{1}{2} = g(\frac{1}{2}) \ , \qquad f(2) = 8 > 2 = g(2) \ .$$

Es folgt

$$f(x) > g(x) \text{ für } x \in (-1,0) \cup (1,\infty) \ , \qquad f(x) < g(x) \text{ für } x \in (-\infty,-1) \cup (0,1) \ .$$

3. Fläche zwischen zwei Funktionen

Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt zwischen zwei Funktionen $f_o(x)$ und $f_u(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ gegeben ist durch

$$A = \int_a^b f_o(x) - f_u(x) \ dx \ .$$

Liegen $f_o(x)$ und $f_u(x)$ beide oberhalb der x-Achse, so gilt

$$A = A_{f_o} - A_{f_u} = \int_a^b f_o(x) \ dx - \int_a^b f_u(x) \ dx = \int_a^b f_o(x) - f_u(x) \ dx \ .$$

Liegen $f_o(x)$ und $f_u(x)$ beliebig, so wählen wir eine konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass

$$\bar{f}_o(x) := f_o(x) + c \qquad \bar{f}_u(x) := f_u(x) + c$$

beide oberhalb der x-Achse liegen. Dann gilt

$$A = A_{\bar{f}_o} - A_{\bar{f}_u} = \int_a^b \bar{f}_o(x) - \bar{f}_u(x) \ dx = \int_a^b (f_o(x) + c) - (f_u(x) + c) \ dx$$
$$= \int_a^b f_o(x) - f_u(x) \ dx \ .$$

4. Bogenmasse und -schwerpunkt

Bestimmen Sie die Integralformeln für die Masse und den Schwerpunkt der auf dem Intervall $[0,1]$ durch die Funktion

$$f(x) := x^2$$

definierten Kurve für die Dichte $\rho(x) := 8x$.

Es gilt

$$m = \int_0^1 \rho(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx = \int_0^1 8x \cdot \sqrt{1 + 4x^2}\ dx$$

und

$$x_S = \frac{1}{m} \int_0^1 \rho(x) \cdot x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx = \frac{\int_0^1 8x^2 \cdot \sqrt{1 + 4x^2}\ dx}{\int_0^1 8x \cdot \sqrt{1 + 4x^2}\ dx} .$$

Um y_S zu berechnen, lösen wir

$$y = f(x) = x^2$$

nach x auf und erhalten

$$g(y) := x = \sqrt{y}$$

auf dem Intervall $[0,1]$ sowie

$$\bar{\rho}(y) = \rho(g(y)) = \rho(\sqrt{y}) = 8\sqrt{y} .$$

Es folgt

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{1}{m} \int_0^1 \bar{\rho}(y) \cdot y \cdot \sqrt{1 + (g'(y))^2}\ dy = \frac{\int_0^1 8\sqrt{y} y \sqrt{1 + \frac{1}{4y}}\ dy}{\int_0^1 8x \cdot \sqrt{1 + 4x^2}\ dx} \\ &= \frac{\int_0^1 y \sqrt{y + \frac{1}{4}}\ dy}{\int_0^1 x \cdot \sqrt{1 + 4x^2}\ dx} . \end{aligned}$$

Bemerkung: Das Integral zur Bestimmung von m lässt sich mit der Substitution $u := 1 + 4x^2$ berechnen, und

$$\int_0^1 y \sqrt{y + \frac{1}{4}}\ dy$$

lässt sich per partieller Integration für $u(y) := y,\ v'(y) := \sqrt{y + \frac{1}{4}}$ berechnen.

5. Mantelfläche

Bestimmen Sie die Mantelfläche des Körpers, der entsteht, wenn die Funktion

$$f(x) := x^3$$

auf dem Intervall $[0,1]$ um die x-Achse rotiert.

Es gilt

$$M_{F_x} = 2\pi \int_0^1 f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx = 2\pi \int_0^1 x^3 \cdot \sqrt{1 + 9x^4}\ dx ,$$

was sich mit der Substitution $u := 1 + 9x^4$ berechnen lässt.

6. Aufgaben für den 18.11.10

(a) Inhomogene Flächen: Bestimmen Sie Masse, Schwerpunkt und Trägheitsmomente der auf dem Intervall $[0,2]$ durch die Funktionen

$$f_o(x) := 1 \ , \qquad f_u(x) := 0$$

definierten Fläche für die Dichten

$$\rho_1(x,y) := xy^2 \ , \qquad \rho_2(x,y) := x \ , \qquad \rho_3(x,y) := y^2 \ .$$

(b) Mehrdimensionale Ableitungen: Bestimmen Sie alle Ableitungen bis zur 2. Ordnung der Funktionen

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \ , &\qquad f(x_1,x_2,x_3,x_3) := (x_1^2 + 2x_1 + 3) \cdot e^{x_2} \cdot \sin(x_3) \cdot \ln|x_4| \ , \\ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ , &\qquad g(z_1,z_2,z_3) := e^{z_1+z_2} \cdot \sin(z_1 z_3) \cdot z_3 \ , \\ h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ , &\qquad h(y_1,y_2,y_3) := \cos(y_1^3 y_2^2 y_3) \cdot \sqrt{\arctan(e)}. \end{aligned}$$

(c) Richtungsableitungen: Bestimmen Sie für $a \in [0, 2\pi]$ die Richtungsableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \ \mathbb{R}, \ f(x,y) := x^2 + y^2$$

an der Stelle $(\sin(a), \cos(a))$ in Richtung $(-\cos(a), \sin(a))$.