WOCHE 5

06.11.2010

1. Flächenmomente

Bestimmen Sie Flächeninhalt, Schwerpunkt und Trägheitsmoment der durch die Funktionen

$$f_o(x) := 4 - x^2 \ , \qquad f_u(x) := 3x$$

definierten Fläche.

Zunächst bestimmen wir die Schnittpunkte der Funktionen: Der Ansatz $f_o(x) = f_u(x)$ liefert

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

und somit $x_1 = -4,\ x_2 = 1$.

- Es gilt

$$\begin{aligned} A &= \int_{-4}^{1} f_o(x) - f_u(x)\ dx = \int_{-4}^{1} -x^2 - 3x + 4\ dx \\ &= \big[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x\big]_{-4}^{1} = (-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4) - (\frac{64}{3} - 24 - 16) = 20\frac{5}{6}\ . \end{aligned}$$

- Es gilt

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{A}\int_{-4}^{1} x \cdot (f_o(x) - f_u(x))\ dx = \frac{1}{A}\int_{-4}^{1} x \cdot (-x^2 - 3x + 4)\ dx \\ &= \frac{1}{A}\int_{-4}^{1} -x^3 - 3x^2 + 4x\ dx = \frac{1}{A}\big[-\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 2x^2\big]_{-4}^{1} \\ &= \frac{1}{A}\big((-\frac{1}{4} - 1 + 2) - (-64 + 64 + 32)\big) = \frac{-31\frac{1}{4}}{20\frac{5}{6}} = -1,5 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{1}{2A}\int_{-4}^{1} (f_o(x))^2 - (f_u(x))^2\ dx = \frac{1}{2A}\int_{-4}^{1} x^4 - 8x^2 + 16 - 9x^2\ dx \\ &= \frac{1}{2A}\int_{-4}^{1} x^4 - 17x^2 + 16\ dx = \big[\frac{1}{5}x^5 - \frac{17}{3}x^3 + 16x\big]_{-4}^{1} \\ &= \frac{1}{2A}\big((\frac{1}{5} - \frac{17}{3} + 16) - (-\frac{1024}{5} + \frac{1088}{3} - 64)\big) = \frac{-83\frac{1}{3}}{41\frac{2}{3}} = -2\ . \end{aligned}$$

- Es gilt

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{1}{3}\int_{-4}^{1} (f_o(x))^3 - (f_u(x))^3\ dx \\ &= \frac{1}{3}\int_{-4}^{1} -x^6 + 8x^4 - 16x^2 + 4x^4 - 32x^2 + 64 - 27x^3\ dx \\ &= \frac{1}{3}\int_{-4}^{1} -x^6 + 12x^4 - 27x^3 - 48x^2 + 64\ dx \\ &= \frac{1}{3}\big[-\frac{1}{7}x^7 + \frac{12}{5}x^5 - \frac{27}{4}x^4 - 16x^3 + 64x\big]_{-4}^{1} \\ &= \frac{1}{3}\big((-\frac{1}{7} + \frac{12}{5} - \frac{27}{4} - 16 + 64) - (\frac{16384}{7} - \frac{12288}{5} - \frac{6912}{4} + 1024 - 256)\big) \\ &= 373\frac{43}{84} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} I_y &= \int_{-4}^{1} x^2 \cdot (f_o(x) - f_u(x))\ dx = \int_{-4}^{1} x^2 \cdot (-x^2 - 3x + 4)\ dx \\ &= \int_{-4}^{1} -x^4 - 3x^3 + 4x^2\ dx = \big[-\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 \big]_{-4}^{1} \\ &= (-\frac{1}{5} - \frac{3}{4} + \frac{4}{3}) - (\frac{1024}{5} - \frac{768}{4} - \frac{256}{3}) = 72\frac{11}{12}\ . \end{aligned}$$

2. Aufgaben für den 13.11.10

(a) Rotationssymmetrische Körper: Bestimmen Sie Volumen und Schwerpunkt des Körpers, der entsteht, wenn die auf dem Intervall $I := [0, 2]$ definierte Funktion

$$f(x) := x^2 - 4$$

- um die x-Achse rotiert. Bestimmen Sie in diesem Fall auch das Trägheitsmoment I_x und das Trägheitsmoment bei Rotation des Körpers um die durch $y = 10$ definierte Achse.
- um die y-Achse rotiert. Bestimmen Sie in diesem Fall auch das Trägheitsmoment I_y und das Trägheitsmoment bei Rotation des Körpers um die durch $x = -5$ definierte Achse.

(b) Lage von Funktionen: Bestimmen Sie, in welchen Intervallen die Funktion

$$f(x) := x^3$$

oberhalb der Funktion

$$g(x) := x$$

liegt.

(c) Fläche zwischen zwei Funktionen: Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt zwischen zwei Funktionen $f_o(x)$ und $f_u(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ gegeben ist durch

$$A = \int_a^b f_o(x) - f_u(x)\ dx\ .$$

(d) Inhomogene Flächen: Bestimmen Sie Masse, Schwerpunkt und Trägheitsmomente der auf dem Intervall $[0, 2]$ durch die Funktionen

$$f_o(x) := 1\ , \qquad f_u(x) := 0$$

definierten Fläche für die Dichten

$$\rho_1(x, y) := xy^2\ , \qquad \rho_2(x, y) := x\ , \qquad \rho_3(x, y) := y^2\ .$$

(e) Bogenmasse und -schwerpunkt: Bestimmen Sie die Integralformeln für die Masse und den Schwerpunkt der auf dem Intervall $[0, 1]$ durch die Funktion

$$f(x) := x^2$$

definierten Kurve für die Dichte $\rho(x) := 8x$.

(f) Mantelfläche: Bestimmen Sie die Mantelfläche des Körpers, der entsteht, wenn die Funktion

$$f(x) := x^3$$

auf dem Intervall $[0, 1]$ um die x-Achse rotiert.