Woche 3

21.10.2009

1. Partialbruchzerlegung

Bestimmen Sie

$$\int_a^b \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\ dx\ .$$

Der Ansatz

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

liefert das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrl}
x=0: & 1 = & 4B + D \\
x=1: & 1 = & 5A+5B+2C+2D \\
x=-1: & 1 = & -5A+5B-2C+2D \\
x=2: & 1 = & 16A+8B+10C+5D
\end{array}$$

mit Lösung $A=0,\ B=\frac{1}{3},\ C=0,\ D=-\frac{1}{3}$. Somit folgt

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\ dx \\
&= \int_a^b \frac{1}{3}\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{x^2+4}\ dx \\
&= \Big[\frac{1}{3}\arctan(x)\Big]_a^b - \int_a^b \frac{1}{6}\frac{\frac{1}{2}}{(\frac{x}{2})^2+1}\ dx \\
&= \Big[\frac{1}{3}\arctan(x) - \frac{1}{6}\arctan(\frac{x}{2})\Big]_a^b\ .
\end{aligned}$$

2. Flächenmomente

Bestimmen Sie Fläche, Schwerpunkt und Trägheitsmoment der auf $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ durch

$$f_o(x) := \cos(x)\ , \qquad f_u(x) := -\cos(x)$$

definierten Fläche.

- Es gilt

$$\begin{aligned}
A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_o(x) - f_u(x)\ dx &= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(x)\ dx \\
&= 2\Big[\sin(x)\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\cdot(1-(-1)) = 4\ .
\end{aligned}$$

- Es gilt

$$x_S = \frac{1}{A}\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\cdot(f_o(x)-f_u(x))\ dx = \frac{2}{A}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\cdot\cos(x)\ dx = 0$$

und

$$y_S = \frac{1}{A}\cdot\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(f_o(x))^2-(f_u(x))^2\ dx = \frac{1}{2A}\int_{-\pi2}^{\pi/2}\cos^2(x)-\cos^2(x)\ dx = 0\ .$$

- Es gilt

$$\begin{aligned}
I_x &= \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (f_o(x))^3 - (f_u(x))^3 \; dx = \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^3(x) \; dx \\
&= \frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\cdot(1-\sin^2(x)) \; dx \\
&= \frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) \; dx - \frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\sin^2(x) \; dx \\
&= \frac{2}{3}\Big[\sin(x) - \frac{1}{3}\sin^3(x)\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{2}{3}((1-\frac{1}{3}) - (-1+\frac{1}{3})) = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3} = \frac{8}{9}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
I_y &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2(f_o(x) - f_u(x)) \; dx = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\cos(x) \; dx \\
&= 2\cdot\Big(\big[x^2\sin(x)\big]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2x\sin(x) \; dx\Big) \\
&= \pi^2 - 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin(x) \; dx \\
&= \pi^2 - 4\cdot\Big(\big[x\cdot(-\cos(x))\big]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\cos(x) \; dx\Big) \\
&= \pi^2 - 4\cdot 0 - 4\big[\sin(x)\big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi^2 - 8 \; .
\end{aligned}$$

3. **Aufgaben für den 28.10.10**

   (a) Trapezformel: Bestimmen Sie
   $$\int_0^1 x\cdot e^{x^3} \; dx$$
   mit Hilfe der Trapezformel für $n = 1,\ldots,4$.

   (b) Simpsonverfahren: Bestimmen Sie
   $$\int_0^1 x\cdot e^{x^3} \; dx$$
   mit Hilfe des Simpsonsverfahrens für $n = 4$.

   (c) Flächenmomente: Bestimmen Sie Flächeninhalt, Schwerpunkt und Trägheitsmoment der durch die Funktionen
   $$f_o(x) := 4 - x^2 \; , \qquad\qquad f_u(x) := 3x$$
   definierten Fläche.

   (d) Rotationssymmetrische Körper: Bestimmen Sie Volumen und Schwerpunkt des Körpers, der entsteht, wenn die auf dem Intervall $I := [-2, 2]$ definierte Funktion
   $$f(x) := x^2 - 4$$
   - um die x-Achse rotiert,
   - um die y-Achse rotiert.