WOCHE 2

14.10.2009

1. Partielle Integration

Bestimmen Sie

$$\int_0^\pi \sin^2(x)\ dx\ .$$

Mit Hilfe der partiellen Integration für $u(x) := \sin(x) =: v'(x)$ und mit der fundamentalen Identität

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

ergibt sich

$$\int_0^\pi \sin^2(x)\ dx = 0 + \int_0^\pi \cos^2(x)\ dx = \int_0^\pi 1 - \sin^2(x)\ dx$$

und somit

$$2 \cdot \int_0^\pi \sin^2(x)\ dx = \int_0^\pi 1\ dx = \pi\ ,$$

also

$$\int_0^\pi \sin^2(x)\ dx = \frac{\pi}{2}\ .$$

2. Substitution

(a) Bestimmen Sie

$$\int_0^1 xe^{x^2}\ dx\ .$$

Mit der Substitution $u := x^2$ folgt

$$dx = \frac{du}{2x}$$

und somit

$$\int_0^1 xe^{x^2}\ dx = \int_0^1 \frac{1}{2}e^u\ du = \left[\frac{1}{2}e^u\right]_0^1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}.$$

(b) Mit der Substitution $u := \cos(x)$ folgt

$$dx = \frac{du}{-\sin(x)}$$

und somit

$$\int_0^{\pi/4} \tan(x)\, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\, dx = \int_1^{\sqrt{1/2}} -\frac{1}{u}\ du = -\Big[\ln|u|\Big]_1^{\sqrt{1/2}} = -\ln(\sqrt{\frac{1}{2}})\ .$$

(c) Bestimmen Sie

$$\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\ dx\ .$$

Mit der Substitution $u := \frac{1}{x}$ folgt

$$dx = -2x \cdot du$$

und somit

$$\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\ dx = \int_1^{1/2} -e^u\ du = -\Big[e^u\Big]_1^{1/2} = -e^{\frac{1}{2}} + e\ .$$

3. Partialbruchzerlegung

Die Grenzen $a, b \in \mathbb{R}$ liegen derart, dass nicht über Polstellen hinweg integriert wird.

(a) Bestimmen Sie

$$\int_a^b \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x^2+1)}\ dx\ .$$

Der Ansatz

$$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

liefert $A = 3,\ C = 0$ und $B = -2$, womit

$$\int_a^b \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x^2+1)}\ dx = \int_a^b \frac{3}{x-1} - \frac{2x}{x^2+1}\ dx = \Big[3\ln|x-1| - \ln|x^2+1|\Big]_a^b$$

folgt.

(b) Bestimmen Sie

$$\int_a^b \frac{x^2+2x+3}{(x^2+1)^2}\ dx\ .$$

Der Ansatz

$$\frac{x^2+2x+3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

führt zu $A = 0,\ B = 1,\ C = 2,\ D = 2$, womit

$$\int_a^b \frac{x^2+2x+3}{(x^2+1)^2}\ dx = \int_a^b \frac{1}{x^2+1}\ dx + \int_a^b \frac{2x}{(x^2+1)^2}\ dx + \int_a^b \frac{2}{(x^2+1)^2}\ dx$$

folgt. Die Stammfunktion des ersten Summanden kennen wir und die des zweiten erhält man durch die Substitution $u := x^2+1$. Bleibt der dritte Summand: Hier hilft nur ein Blick an die richtige Stelle des Taschenbuchs der Mathematik, um zu erkennen, dass sich dieses Integral auf das bekannte Integral

$$\int_a^b \frac{1}{x^2+1}\ dx$$

zurückführen lässt. Die nötigen Rechnungen hierzu sind aber ziemlich trickreich und auf den ersten Blick nicht zu erkennen. Kurzum, die Stammfunktion lautet

$$F(x) = \frac{x}{x^2+1} + \arctan(x)\ ,$$

wie man durch Ableiten - hierbei benötigt man Produkt- und Kettenregel - bestätigt: Es gilt

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}\cdot 2x + \frac{1}{x^2+1} \\ &= \frac{2(x^2+1)}{(x^2+1)^2} - \frac{2x^2}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2}{(x^2+1)^2}\ . \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{x^2+2x+3}{(x^2+1)^2} &= \Big[\arctan(x) - \frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+1} + \arctan(x)\Big]_a^b \\ &= \Big[2\arctan(x) + \frac{x-1}{x^2+1}\Big]_a^b\ . \end{aligned}$$

Wir halten fest: Funktionen mit mehrfachen komplexen Nullstellen lassen sich zwar integrieren, allerdings nur sehr schwierig - diese Aufgabe war so nicht beabsichtigt.

4. Uneigentliche Integrale

(a) Bestimmen Sie

$$\int_0^\infty e^{-x}\ dx\ .$$

Es gilt

$$\int_0^\infty e^{-x}\ dx = \lim_{u\to\infty}\int_0^u e^{-x}\ dx = \lim_{u\to\infty}\Big[-e^{-x}\Big]_0^u = \lim_{u\to\infty} -e^{-u}-1 = 1\ .$$

(b) Bestimmen Sie

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\ dx\ .$$

Es gilt

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\ dx = \lim_{s\to\infty}\int_1^s \frac{1}{x^4}\ dx = \lim_{s\to\infty}\Big[-\frac{1}{3x^3}\Big]_1^s = \lim_{s\to\infty} -\frac{1}{3s^3}+\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\ .$$

(c) Bestimmen Sie

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\ dx\ .$$

Mit der Substitution $u := 4-x^2$ folgt

$$dx = -\frac{du}{2x}$$

und somit

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\ dx &= \lim_{\lambda\to 2}\int_{u(0)}^{u(\lambda)} -\frac{1}{2\sqrt{u}}\ du\\ &= \lim_{\lambda\to 2}\Big[-\sqrt{u}\Big]_4^{4-\lambda^2} = \lim_{\lambda\to 0} -\sqrt{\lambda}+\sqrt{4} = 2\ .\end{aligned}$$

5. Aufgaben für den 21.10.2010

(a) Partialbruchzerlegung: Bestimmen Sie

$$\int_a^b \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\ dx\ .$$

(b) Trapezformel: Bestimmen Sie

$$\int_0^1 x\cdot e^{x^3}\ dx$$

mit Hilfe der Trapezformel für $n = 1,\ldots,4$.

(c) Simpsonverfahren: Bestimmen Sie

$$\int_0^1 x\cdot e^{x^3}\ dx$$

mit Hilfe des Simpsonsverfahrens für $n = 4$.

(d) Flächenmomente: Bestimmen Sie Fläche, Schwerpunkt und Trägheitsmoment der auf $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ durch

$$f_o(x) := \cos(x)\ , \qquad f_u(x) := -\cos(x)$$

definierten Fläche.