# Woche 1

07.10.2009

**1. Partialbruchzerlegung**

Die Grenzen $a, b \in \mathbb{R}$ liegen derart, dass nicht über Polstellen hinweg integriert wird.

(a) Bestimmen Sie

$$\int_a^b \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx\ .$$

Der Ansatz

$$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

liefert $A = 3,\ B = -11$ und $C = 9$, womit

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx &= \int_a^b \frac{3}{x-1} - \frac{11}{x-2} + \frac{9}{x-3}\,dx\\ &= \Big[3\ln|x-1| - 11\ln|x-2| + 9\ln|x-3|\Big]_a^b\end{aligned}$$

folgt.

(b) Bestimmen Sie

$$\int_a^b \frac{x^2+2x+3}{(x-1)^2(x-2)}\,dx\ .$$

Der Ansatz

$$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2}$$

liefert $A = -10,\ B = -6$ und $C = 11$, womit

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{x^2+2x+3}{(x-1)^2(x-2)}\,dx &= \int_a^b -\frac{10}{x-1} - \frac{6}{(x-1)^2} + \frac{11}{x-2}\,dx\\ &= \Big[-10\ln|x-1| + \frac{6}{x-1} + 11\ln|x-2|\Big]_a^b\end{aligned}$$

folgt.

(c) Bestimmen Sie

$$\int_a^b \frac{x^2+2x+3}{(x-1)^3}\,dx\ .$$

Hier führt der Ansatz

$$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

zum Ziel.

(d) Bestimmen Sie

$$\int_a^b \frac{x^2+2x+3}{(x-1)^2(x-2)^2}\,dx\ .$$

Hier führt der Ansatz

$$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)^2(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2}$$

zum Ziel.

**2. Partielle Integration**

(a) Bestimmen Sie

$$I := \int_0^1 xe^x \; dx \; .$$

Mit Hilfe der partiellen Integration für $u(x) := x, \; v'(x) := e^x$ ergibt sich $I = 1$.

(b) Bestimmen Sie

$$\int_0^1 x^2 e^x \; dx \; .$$

Wir setzen $u(x) := x^2, \; v'(x) := e^x$. Es folgt $u'(x) = 2x, \; v(x) = e^x$ und somit

$$\int_0^1 x^2 e^x \; dx = \Big[x^2 e^x\Big]_0^1 - \int_0^1 2xe^x \; dx \; . \tag{1}$$

Wir wenden ein zweites Mal die partielle Integration mit $u(x) := 2x, \; v'(x) := e^x$ an, es gilt also $u'(x) = 2, \; v(x) = e^x$. Wir erhalten

$$\int_0^1 2xe^x \; dx = \Big[2xe^x\Big]_0^1 - \int 2e^x \; dx \; . \tag{2}$$

Einsetzen von (2) in (1) liefert

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^x \; dx &= \Big[x^2 e^x\Big]_0^1 - \int_0^1 2xe^x \; dx \\ &= \Big[x^2 e^x\Big]_0^1 - \left(\Big[2xe^x\Big]_0^1 - \int_0^1 2e^x \; dx\right) \\ &= (e^1 - 0) - (2e^1 - 0) + \Big[2e^x\Big]_0^1 \\ &= -e^1 + (2e^1 - 2) = e - 2 \; . \end{aligned}$$

**3. Aufgaben für den 14.07.10**

(a) Partielle Integration: Bestimmen Sie

$$\int_0^\pi \sin^2(x) \; dx \; .$$

(b) Substitution: Bestimmen Sie

$$\int_0^1 xe^{x^2} \; dx \; , \qquad \int_0^{\pi/4} \tan(x) \; dx \; , \qquad \int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} \; dx \; .$$

(c) Partialbruchzerlegung: Bestimmen Sie

$$\int_a^b \frac{x^2 + 2x + 3}{(x-1)(x^2+1)} \; dx \; , \qquad \int_a^b \frac{x^2 + 2x + 3}{(x^2+1)^2} \; dx \; .$$

(d) Uneigentliche Integrale: Bestimmen Sie

$$\int_0^\infty e^{-x} \; dx \; , \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^4} \; dx \; , \qquad \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} \; dx \; .$$