Übungsaufgaben zur Mathematik

Halbordnungen

1. Erstellen Sie ein (möglichst übersichtliches) HASSE-Diagramm für

(a) $(T_{60}, |)$ (b) $(p(S), \subset)$ mit $S = \{a, b, c, d\}$.

2. $(H, *)$ sei ein Monoid. Man definiere auf H: $aRb \;:\Leftrightarrow\; \exists\, x \in H:\; a * x = b$.

(a) Ist R eine Äquivalenzrelation? Speziell für $(H, *) = (\mathbb{N}, \cdot)$?

(b) Ist R eine Halbordnung? Speziell für $(H, *) = (\mathbb{N}, \cdot)$?

3. $M := \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 24, 54\}$; für $a, b \in M$ definiere man

$$aRb \;:\Leftrightarrow\; (3a \text{ teilt } b) \vee (2a \text{ teilt } b) \vee (a = b).$$

(a) Erstellen Sie eine Relationstafel von R.

(b) Erstellen Sie zu (M, R) ein HASSE-Diagramm.

(c) Ist (M, R) eine Halbordnung? eine Verbandsordnung?

4. $H = \{a, b, c, d, e\}$. Auf H ist die tabellierte Relation R definiert.

(a) Zeigen Sie: R ist eine Halbordnung. Erstellen Sie ein HASSE-Diagramm von (H, R).

(b) Ist R eine Verbandsordnung?

(c) $A = \{a, b, c\}$. Bestimmen Sie Supremum, Infimum, maximale und minimale Elemente, größtes und kleinstes Element von A.

R	a	b	c	d	e
a	×			×	
b	×	×		×	×
c	×		×	×	×
d				×	
e				×	×

5. $A = \{2, 3, 6, 18, 21\}$. Bestimmen Sie die Menge der oberen Schranken, Supremum, die maximalen und das größte Element von A in den Halbordnungen $(\mathbb{N}, \leq)$ und $(\mathbb{N}, |)$.

6. T sei die Teilerhalbordnung zu $n = 79380$. Wie viele Elemente hat T? Bestimmen Sie $\inf(588, 630)$ und $\sup(588, 630)$ in T. Welche Teiler von n besitzen in T ein Komplement?

7. Auf $H = \{1, 2, 3, 12, 18\}$ sei die Teilerhalbordnung definiert. Bestimmen Sie zu allen zweielementigen Teilmengen A von H die Menge der oberen Schranken und das Supremum. Ist H vollständig? Ist H eine Verbandsordnung?

8. H sei eine Halbordnung. Man definiere: $aRb \;:\Leftrightarrow\; \sup(a, b)$ existiert.
Ist R eine Äquivalenzrelation auf H?