

Übungsaufgaben zur Mathematik

Komplexe Zahlen

1. Man berechne mit $z = 2 + 3j$, $w = -1 + 2j$:

$$z \cdot (z - w), \quad \operatorname{Re}(\bar{z} \cdot w), \quad z/\bar{w}, \quad \operatorname{Im}\left(\frac{z^2}{w}\right), \quad \bar{w} \cdot (z - j), \quad |z - \bar{w}|, \quad \left|\frac{1}{z} - \frac{1}{w}\right|$$

2. Zeigen Sie folgende Rechenregeln für $z, w \in \mathbb{C}$:

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad |\bar{z}| = |z|, \quad z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z, \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2, \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}, \quad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}, \quad |z \cdot w| = |z| |w|$$

3. $d(a, b) = |a - b|$ ist der Abstand der komplexen Zahlen a und b .

Zeigen Sie geometrisch (vektoriell): $d(a, b) \leq d(a, c) + d(b, c)$
 Geben Sie ein Beispiel an für: $d(a, b) = d(a, c) + d(b, c)$

4. EULERSche Darstellung $z = re^{j\alpha}$ für: $z = -2, \quad -j, \quad 1 - j, \quad 2 + 3j, \quad 2 - 3j$

5. Geben Sie z und w in cartesischer und polarer (Eulerscher) Form an:

$$z = (\sqrt{3} + j) \cdot (2 + 2\sqrt{3}j); \quad w = (-4 + j\sqrt{48}) \cdot e^{-j\pi/3}$$

6. Man bestimme und skizziere folgende Teilmengen von \mathbb{C} :

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z + 1) \leq \operatorname{Im}(z - j)\}$$

$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid (\operatorname{Re} z) \cdot (\operatorname{Im} z) \geq 1 \text{ und } |z - j| \leq 2\}.$$

7. Zerlegen Sie vollständig in Linearfaktoren:

(a) $(z^2 + 2)(z^2 + 2z - 3)$

(b) $(z^2 - z + 4)(z^2 + z - 4)(z^3 - 1)$

(c) $z^4 + 2z^3 + 6z^2 + 2z + 5$ (Hinweis: $z = j$ ist eine Nullstelle)

8. Man berechne: $(-1 - \sqrt{3}j)^8$, $(j + \sqrt{3})^{15}$, $\sqrt[4]{j + 1}$, $\sqrt[5]{2j + 1}$, $(j + \sqrt{3})^{4/11}$

9. Lösen Sie die Gleichungen in \mathbb{C} :

(a) $z^2 + 2z + 5 = 0$

(c) $z^4 + 1 + \sqrt{3}j = 0$

(b) $z^2 + 30j + 16 = 0$

(d) $jz^2 + (1 - 2j)z - 2 = 0$