Übungsaufgaben zur Mathematik

Differentialgleichungen

Berechnen Sie die allgemeine Lösung $y = y(x)$ der Differentialgleichungen in den Aufgaben (1) bis (6):

1. (a) $e^{-x}y' = x + \sin x$

(b) $x^2y' + y = 0$

(c) $y' = e^x(1 + y^2)$

(d) $y' = 2 - 3y$

(e) $\cos^2 x \cdot y' = 2\sqrt{y}$

(f) $xy'' = 1$

(g) $yy' = e^x(1 - y^2)$

(h) $y'(y - 1) = 2x^2 + 7x - 4$

(i) $y' = (x - 1)\sqrt{y}$

(j) $y'y - \cos x = 3x$

(k) $(y'y)^2 = xy^3$

(l) $(x + e^x) \cdot y' = (1 + e^x) \cdot y^2$

(m) $\cos y \cdot x^2y' = 1$

(n) $y' = x \cdot e^{x+y}$

2. (a) $y' + \frac{y}{x} = 1 + x$

(b) $y' + 2y = x^2$

(c) $y' + 2xy - x = 0$

(d) $y'' = y' + x$

3. (a) $y'' + 4y' + 4y = 0$ mit $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

(b) $y'' + 4y' + 3y = 0$ mit $y(0) = 2,\ y'(0) = -1$

(c) $y'' + 2y' + 5y = 0$ mit $y(0) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

4. (a) $y^{(3)} - 2y'' - y' + 2y = 0$

(b) $y^{(6)} + 3y^{(5)} - 4y^{(3)} = 0$

(c) $y^{(4)} - 5y^{(3)} + 6y'' = 0$

(d) $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 14y'' + 20y' + 25y = 0$
Hinweis: $-1 + 2j$ ist eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms.

5. $y'' - 3y' + 2y = r(x)$ mit $r(x) =$

(a) xe^{2x} (b) $x^2 + 1$ (c) $e^x \sin x$ (d) $\sin x + e^{3x}$

6. Lösen Sie für $a \in \mathbb{R}$ (für die spezielle inhomogene Lösung reicht in der Regel der Ansatz):

(a) $y'' + ay = x \sin x$

(b) $y''' - ay' = e^{2x}$

(c) $y'' - 2y' + ay = e^x \sin 2x$

(d) $y^{(4)} - ay'' = 2e^x + x^2$

(e) $y''' - 2ay'' - y' = x^2 + \sin x$

(f) $y^{(4)} + 2ay'' = \sin x$

(g) $y'' - ay' = e^x + x$

(h) $y''' - 2y'' + ay' = e^{3x}$

7. Bestimmen Sie die allgemeine homogene Lösung und den *Ansatz* für eine spezielle inhomogene Lösung ($a \in \mathbb{R}$):

(a) $y'' - 2y' + 3ay = e^x + 2x^2 - e^x cos(4x)$

(b) $y^{(4)} - 2ay^{(3)} + 3y'' = (x^3 + 1)e^{2x}$

(c) $y''' - a(4y'' - y') = sin(2x)$