Übungsaufgaben zur Mathematik

Gruppen, Ringe, Körper

1. Erstellen Sie die Verknüpfungstafeln der Permutationen der Mengen $A = \{1, 2\}$ und $B = \{1, 2, 3\}$ (Verknüpfung = Verknüpfung $\circ$). Handelt es sich um Gruppen?

2. Gegeben sind die reellen Funktionen $f(x) =$

(a) x (b) $1 - x$ (c) $\frac{1}{x}$ (d) $\frac{x-1}{x}$ (e) $\frac{1}{1-x}$ (f) $\frac{x}{x-1}$

Zeigen Sie, dass diese 6 Funktionen mit der Verkettung $\circ$ eine Gruppe bilden. (Verknüpfungstabelle!)

3. Q sei die Menge der Abbildungen (Drehungen und Spiegelungen) eines Quadrats auf sich selbst. Erstellen Sie die Verknüpfungstafel von $(Q, \circ)$ ($\circ$ ist Verkettung der Abbildungen) und zeigen Sie, dass $(Q, \circ)$ eine Gruppe ist.

4. $a, n \in \mathbb{N}$; a mod n sei der Rest bei Division von a durch n; $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.
Für $a, b \in \mathbb{Z}_n$ definiert man (vgl. Vorlesung):
$a\#b := (a + b) \bmod n,\ a \times b := (ab) \bmod n.$

(a) Erstellen Sie die Verknüpfungstafeln der Operationen $\#$ und $\times$ für $n = 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10$.
(b) Warum ist $(\mathbb{Z}_5, \#, \times)$ ein Körper? Warum nicht $(\mathbb{Z}_6, \#, \times)$?
(c) Welche Elemente besitzen in $(\mathbb{Z}_n, \times)$ $(n = 5, 8, 10)$ ein Inverses?
(d) G sei die Menge der invertierbaren Elemente von$(\mathbb{Z}_{10}, \times)$. Zeigen Sie, dass $(G, \times)$ eine Gruppe ist.
(e) Bestimmen Sie die Nullteiler von $(\mathbb{Z}_n, \#, \times), n = 3, 4, 6, 9, 10$.

5. $(G, *)$ sei eine Gruppe, $a \in G$, $f(x) := x * a$, $g(x) := \bar{x}$ ($\bar{x}$ Inverses von x).

(a) Zeigen Sie: $f : G \to G$ und $g : G \to G$ sind bijektive Abbildungen.
(b) Ist f auch für *Halb*gruppen bijektiv?
(c) Ist f bzw. g ein Homomorphismus?

6. U und V seien Untergruppen einer Gruppe G. Sind dann $U \cap V$ bzw. $U \cup V$ Untergruppen von G? Wie sieht es bei Halbgruppen aus?

7. M sei die Menge der $(n \times n)$-Matrizen. Durch die 6 Bedingungen

$$|A| \geq 0,\ |A| \geq 1,\ |A| \geq 2,\ |A| < 0,\ |A| > 0 \text{ und } |A| = 1$$

werden 6 Teilmengen von M definiert ($|A|$ =Determinate von A). Untersuchen Sie, welche dieser Teilmengen mit der üblichen Matrizenmultiplikation eine algebraische Struktur, eine Halbgruppe, ein Monoid oder eine Gruppe bildet.

8. Berechnen Sie über dem Körper $\mathbb{Z}_5$ die Determinante und Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(alle Rechnungen modulo 5).}$$

9. Für $a, b \in \mathbb{N}_0$ definiere man $a \perp b := |a - b|$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{N}_0, \perp)$ eine algebraische Struktur ist, die alle Gesetze einer Gruppe außer der Assoziativität erfüllt.

10. $(R, +, \cdot)$ sei ein Ring, $a \in \mathbb{R}$; $S := \{x \in \mathbb{R} \mid x \cdot a = a \cdot x\}$. Ist $(S, +, \cdot)$ ein Ring?