

Übungsaufgaben zur Mathematik

Boolsche Algebra

1. Beweisen Sie mittels Wahrheitstabellen folgende Äquivalenzen:

$$(\alpha \rightarrow \beta) = \neg(\alpha \wedge \bar{\beta}); \quad \alpha \vee (\alpha \wedge \beta) = \alpha; \quad \neg(((\bar{\alpha} \wedge \beta) \vee \alpha) \wedge \bar{\gamma}) = (\bar{\alpha} \wedge \bar{\beta}) \vee \gamma.$$

2. Zeigen Sie: $(\alpha \wedge \bar{\alpha}) \rightarrow \beta$ und $(\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \beta$ sind Tautologien.

3. Erstellen Sie die disjunktive Normalform und eine Minimalform für:

$$(a) \ x + y + z \qquad (b) \ \overline{(\bar{x}y + x)\bar{z}} \qquad (c) \ (\bar{x} + y + z)(x + \bar{y} + z)$$

4. Bestimmen Sie folgende Schaltfunktionen und konstruieren Sie dazu möglichst einfache Schaltkreise:

(a) Eine Lampe soll leuchten, wenn die Mehrheit von drei Schaltern eingeschaltet ist.

(b) Eine Lampe soll ihren Zustand (ein/aus) ändern, wenn einer von drei Schaltern betätigt wird. (Grundstellung: Wenn alle Schalter in Stellung 1 sind, ist die Lampe eingeschaltet.)

5. $B := \{0, 1\}$. Man zeige:

(a) $(B, +, \cdot)$ ist eine Boolesche Algebra.	$+$	$0 \ 1$	\cdot	$0 \ 1$
(b) B^n ist eine Boolesche Algebra, wobei die Operationen komponentenweise definiert sind.	0	$0 \ 1$	0	$0 \ 0$
	1	$1 \ 1$	1	$0 \ 1$

6. $(B, +, \cdot)$ sei eine Boolesche Algebra. Dann wird durch

$$x \perp y := x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y \quad (\bar{x} \text{ ist das Komplement von } x \text{ in } B)$$

eine neue Verknüpfung auf B definiert.

(a) Zeigen Sie, dass (B, \perp) eine Gruppe ist.

(b) Erstellen Sie die Gruppentafel von (B, \perp) für $B = T_6$.

7. Wie viele Teiler hat die Zahl 49049?

8. Bestimmen Sie alle Strukturtypen von Teilverbänden mit $N = 10$ bis $N = 16$ Elementen. Welche davon sind linear, welche Boolesch? Stellen Sie einige Typen in einem Teilerdiagramm dar.

9. Zeigen Sie: Der Teilverband mit $N = 42$ und die Mengenalgebra der Teilmengen von $S = \{a, b, c\}$ sind isomorph.

10. Warum ist T_{2310} Boolesch? Bestimmen Sie alle Komplemente (Tabelle).