Übungsaufgaben zur Mathematik

Abbildungen

1. $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{0,1,3,5\}$, $f : X \to Y$ mit $f(x) = (x-2)^2$. Zeichnen Sie ein Zuordnungsdiagramm von f. Ist f injektiv? Ist f surjektiv?

2. Bestimmen Sie den Definitionsbereich folgender reeller Funktionen. Welche dieser Funktionen sind umkehrbar? Welche Funktionen sind auf verkleinerten Definitionsbereichen umkehrbar? Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen folgender Funktionen, falls möglich: $f(x) =$

(a) $\sqrt{x^2+1}$

(b) $2 + \sqrt{1-x}$

(c) $\ln(|x| - x)$

(d) $3x^2 + x$

(e) $(x^2+1)^{-1}$

(f) $\ln(x^2+x)$

(g) $\dfrac{1}{x} - 2x$.

3. $P = \{p \,|\, p \text{ Polynom}\}$, $d : P \to P$ mit $d(p) = p' =$ Ableitung von p.
Ist d injektiv? Ist d surjektiv?

4. $d : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ mit $d(a,b,c,d) = ad - bc$. Ist d injektiv? Ist d surjektiv?

5. Bilden Sie die 6 möglichen Verkettungen der drei Funktionen $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \ln(x-1)$ und $h(x) = 1/x$. (Gemeint sind $f \circ g \circ h,\ h \circ f \circ g, \ldots$.)

6. Gegeben sind die reellen Funktionen $f_1(x) = 1/x,\ f_2(x) = 1 - x$.

(a) Welche Funktionsgleichung haben dann
$f_3 = f_1 \circ f_2,\ f_4 = f_2 \circ f_1,\ f_0 = f_1 \circ f_1,\ f_5 = f_1 \circ f_4$?

(b) Was sind die Umkehrfunktionen der f_k, $k = 0, \ldots, 5$?

7. $P = \{f_k \,|\, k = 0, \ldots, 5\}$ sei die Menge der Permutationen von $X = \{a,b,c\}$, $f_0 = id =$ Identität auf X (vgl. Vorlesung).

(a) Erstellen Sie eine Tabelle aller 36 Verkettungen $f_k \circ f_j$ dieser Permutationen.

(b) Wie lauten die Umkehrfunktionen der $f \in P$?

8. f, g und h seien Abbildungen einer Menge X in sich. Zeigen Sie:

(a) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

(b) $f \circ id = id \circ f = f$ (id ist die Identität auf X)

(c) f bijektiv $\Rightarrow f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = id$

(d) f und g bijektiv $\Rightarrow f \circ g$ bijektiv

(e) X sei endlich. Wie viele bijektive Abbildungen $f : X \to X$ gibt es?