

Übungsaufgaben zur Mathematik

Numerische Integration

1. Berechnen Sie $\int_a^b f(x)dx$ *exakt* und mittels *Trapez*-, *SIMPSON*- und *BODE*-Regel ($n = 4, 8, 16, 32, 64$) und dem *ROMBERG*-Verfahren ($\epsilon = 10^{-4}, \epsilon = 10^{-7}$). Wie groß ist der *Fehler*?
- (a) xe^x auf $[0, 1], [3, 5]$ (c) $(1+x^2)^{-1}$ auf $[0, 1]$
 (b) $(x \ln(x))^{-1}$ auf $[2, 3], [2, 5]$ (d) $x \sin(x^2)$ auf $[0, \sqrt{\pi}]$
2. Wie groß muss n (*die Anzahl der Stützstellen*) gewählt werden, um mittels *Trapez*-, *SIMPSON*- und *BODE*-Regel mit Sicherheit einen *Fehler* $< 10^{-6}$ zu erreichen? Wie groß ist der *wirkliche Fehler* bei den ermittelten Schrittweiten?
- (a) e^x auf $[0, 1]$ (c) $\ln(x^2)$ auf $[1, 2]$
 (b) \sqrt{x} auf $[1, 2]$ (d) $\sin(x)$ auf $[0, \pi/2]$
3. Bestimmen Sie *Flächeninhalt* und *Umfang* der von folgenden Funktionen *eingeschlossenen Bereiche*: (Skizze!)
- (a) e^x ; $x+2$ (c) $\cos x$; $x^2+0.5$
 (b) $\ln x$; $(x-2)^4$ (d) e^x ; x^3+2
4. Berechnen Sie *Bogenlänge* und *Sektorfläche* von $r = r(\varphi)$ für $\varphi \in [0, \pi/2]$:
- (a) $\cos \varphi$ (b) $e^{2\varphi}$ (c) $\sqrt[3]{\varphi}$ (d) $\sqrt{\ln(1+\varphi)}$
5. Berechnen Sie die *Bogenlänge* von $y = f(x)$ auf dem Intervall $[0, 1]$:
- (a) $1+x^2$ (b) $1/(x+1)$ (c) e^x (d) $\cos x$
6. $B := [0, 1]^2$. Berechnen Sie numerisch: $\iint_B f$ für $f(x, y) =$
- (a) $\sqrt{|x-y|}$ (b) $\exp \sqrt{x+y}$ (c) $\sin(x+e^y)$
7. $B := [0, 1]^3$. Berechnen Sie $\iiint_B \exp \sqrt{x+y+z}$ und $\iiint_B \sqrt[3]{x+\sqrt{y+z}}$.