

## Übungsaufgaben zur Mathematik

### Gleichungssysteme numerisch

1. Lösen Sie folgende *nichtlineare Gleichungssysteme* (möglichst Skizze anfertigen):

(a) $x^2 + y^2 = 4$ $\sin x = y$	(c) $y^2 = e^x$ $xy = 1$	(e) $x^2 - y^2 = 3$ $2xy = e^x$
(b) $x + y + z = 6$ $x \cdot y \cdot z = 6$ $x + y^2 + xy = 8$	(d) $x^2 + y^2 = 1$ $y - e^x = 0$	(f) $x = \sin x + \cos y$ $y = \sin x - \cos y$

2. Bestimmen Sie die *Extremwerte* folgender Funktionen  $F(x, y) =$

(a) $x^3 - 12xy + 8y^3$	(c) $x^7 - 3xy + y^3 - e^x$
(b) $x^4 - 6x^2y^2 + y^4$	(d) $x^2e^y + y^2e^x + x(y - 2)$

3. Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  hat die *Fläche zwischen den Funktionen*  $f(x) = \alpha - x^2$  und  $g(x) = e^x$  den *Flächeninhalt*  $= 2$ ?

4. Für welches  $\alpha$  *halbiert* die Funktion  $f(x) = \alpha e^x$  die *Fläche unter dem Cosinusbogen* auf dem Intervall  $[-\pi/2, +\pi/2]$ ?

5. Lösen Sie folgende *komplexe Gleichungen* :

(a) $z^2 + 2z + j = 0$	(c) $z^4 + z^2 - z + 1 = 0$	(e) $e^z + z = 0$
(b) $z^3 + 2z + 1 = 0$	(d) $z^2 + \frac{1}{z} = 1$	(f) $e^z - z^2 + 1 = 0$

6. Für welche  $\alpha > 0$  erfüllen die folgenden lin. Gleichungssysteme ein *Konvergenzkriterium* des *JACOBI-* bzw. *GAUSS-SEIDEL-*Verfahrens?

Für welche  $\alpha$  *konvergieren* diese Verfahren *praktisch*? (Ausprobieren!)

*Vergleichen* Sie für einige  $\alpha$  die *Leistung* der Verfahren (*Anzahl der Iterationsschritte*). Berechnen Sie die *ersten beiden* Iterationen *manuell* (Start  $\vec{x}_0 = \vec{0}$ ).

(a) $\begin{array}{ccc c} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & \alpha & 4 \end{array}$	(b) $\begin{array}{cccc c} 3 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha & 4 \end{array}$
---	---

7. Lösen Sie folgende *überbestimmte lineare Systeme* (verallg. Lösung):

(a) $\begin{array}{ccc c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}$	(b) $\begin{array}{cccc c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}$
---	---