Ergänzungen zu

Naturwissenschaftliche Grundlagen und Anwendungen

WS 2005/2006

Prof. Dr. Klaus Wüst

Fachbereich Naturwissenschaften, Mathematik und Informatik

Fachhochschule Gießen-Friedberg

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Schwingungen und Wellen

1.1 Periodische Vorgänge

Vorgänge sind periodisch, wenn sie aus einem Teilvorgang bestehen, der sich endlos wiederholt. Beispiele für periodische Vorgänge sind

- das Tropfen eines Wasserhahns
- Drehung von Rädern
- Pendel
- Schwingungen
- Wechselspannung

Die zeitliche Dauer Länge dieses Teilvorgangs ist die *Periodendauer* T. Die Anzahl der Wiederholungen pro Sekunde ist die *Frequenz* f des periodischen Vorganges. Es gilt

$$f = \frac{1}{T} \tag{1.1}$$

Die Einheit der Frequenz ist das *Hertz* = Hz = 1/s. Die folgende Abbildung stellt ein periodisches Impulssignal mit einer Periodendauer von 0.25 s dar. Gemäß Gleichung 1.1 beträgt die Frequenz 4 Hz.

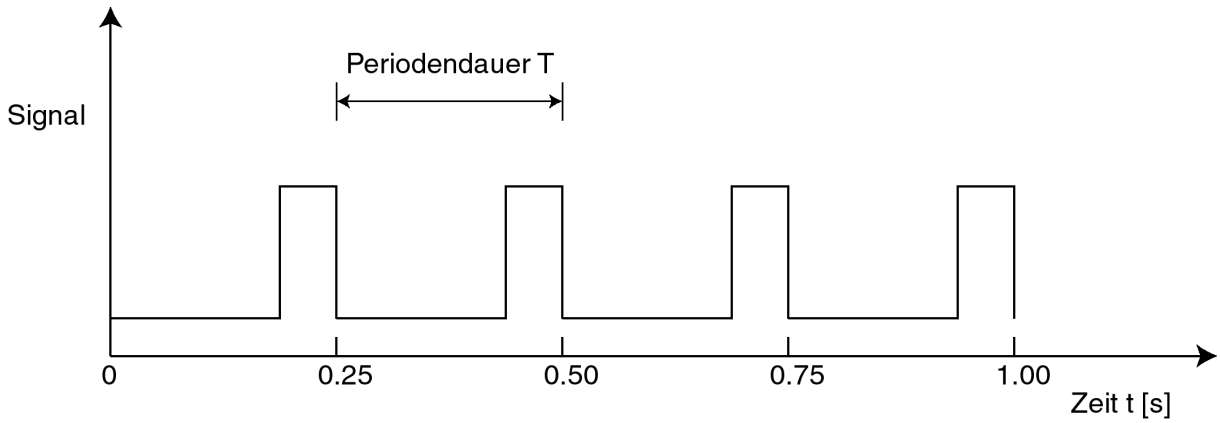

Abbildung 1.1: Ein periodischer Vorgang mit einer Periodendauer von 0.25s.

1.2 Harmonische Schwingungen

Eine harmonische Schwingung entsteht immer dann, wenn auf die Abweichung einer physikalischen Größe von einer Ruhestellung ein Rückstellmoment entsteht, das der Abweichung entgegenwirkt und der Größe der Abweichung proportional ist. Ein Beispiel dafür ist eine Masse, die an einer Feder hängt. Wenn sie etwas aus der Ruhelage ausgelenkt wird, übt die Feder eine Rückstellkraft zur Ruhestellung hin aus. Es entstehen harmonische Schwingungen, wie in Abbildung 1.2 dargestellt.

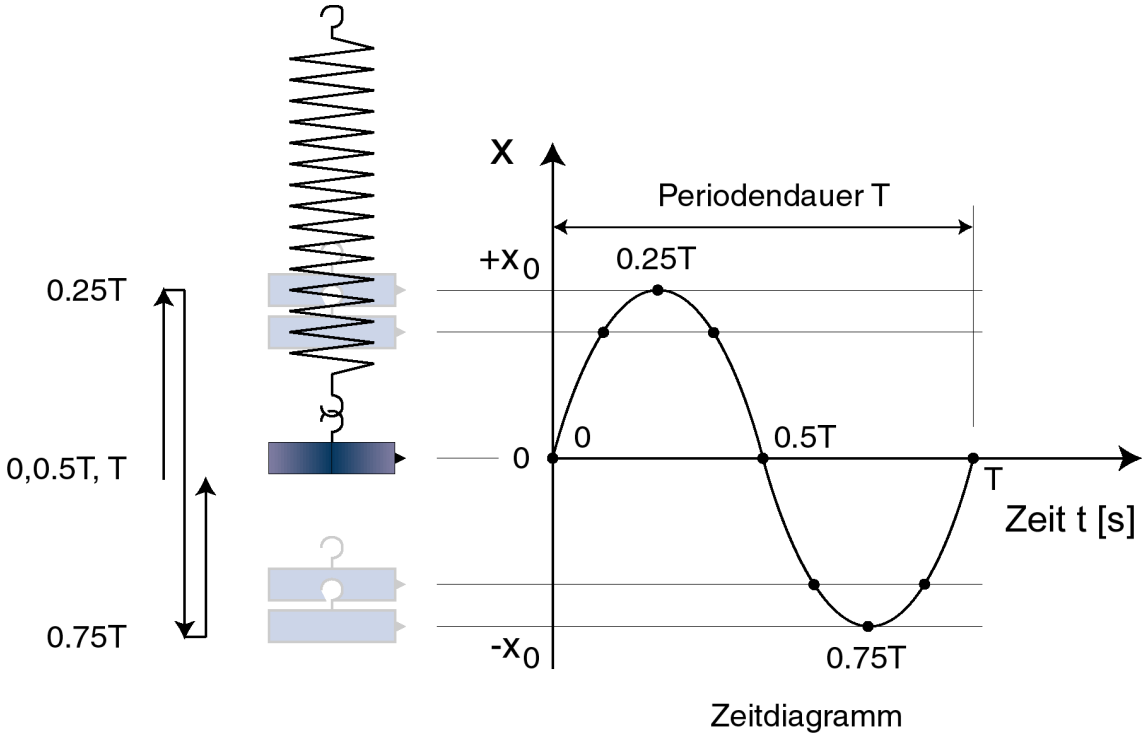

Abbildung 1.2: Harmonische Schwingung einer Masse an einer Feder (ohne Dämpfung)

Bei einer harmonischen Schwingung befolgt eine physikalische Größe die folgender Gesetzmäßigkeit:

$$x = x_0 \sin(2\pi f t + p) \tag{1.2}$$

Dabei bedeuten x_0 die *Amplitude* der Schwingung, f die Frequenz der Schwingung, t die Zeit und p die *Phasenverschiebung*. Ein solches System wird auch harmonischer Oszillator genannt.

Im Falle der Federschwingung ist x_0 eine Wegstrecke. Die Kenngrößen einer solchen harmonischen Schwingung sind in der Abbildung 1.3 dargestellt. Das Argument der Sinusfunktion nennt man Phase.Die durch die Phasenverschiebung p hervorgerufene zeitliche Verschiebung des Signals ist $t_p = -p/2\pi f$.

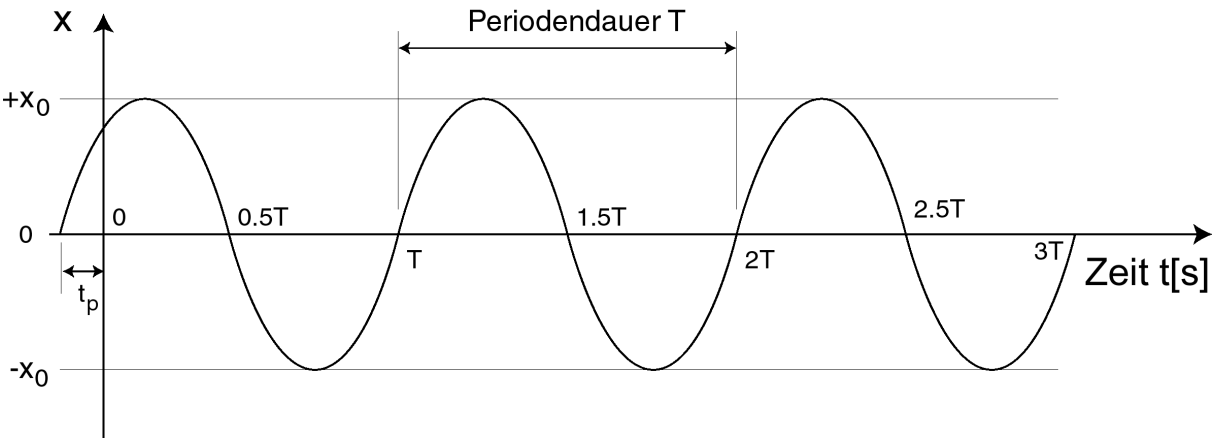

Abbildung 1.3: Eine harmonische Schwingung

Oft kann die Zeitachse frei gewählt werden. Dann ist es am einfachsten, die Schwingung bei 0 beginnen zu lassen und damit die Phase $p = 0$ zu setzen. Dann sieht die harmonische Schwingung wie in Abbildung 1.4 aus. Auch die Projektion einer Kreisbewegung auf einen ebenen Schirm, die in Abbildung 1.5 dargestellt ist, führt wegen zur Gesetzmäßigkeit von Gl. 1.2, obwohl hier kein Rückstellmoment auftritt. Dies liegt an der elementaren Geometrie und der Definition der Sinusfunktion. Es werden daher auch Bezeichnungen von der Kreisbewegung für die Beschreibung harmonischer Schwingungen übernommen. So ist z.B. bei der Kreisbewegung die Winkelgeschwindigkeit im Bogenmaß der Quotient aus Winkeländerung $\Delta\phi$ pro Zeiteinheit Δt. In einer vollen Periodenzeit T kommt eine vollständige Umdrehung zustande, im Bogenmaß also 2π. Mit Gl.1.1 ergibt sich:

$$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \tag{1.3}$$

Damit wird Gl. 1.2 zu

$$x = x_0 \sin(\omega t + p) \tag{1.4}$$

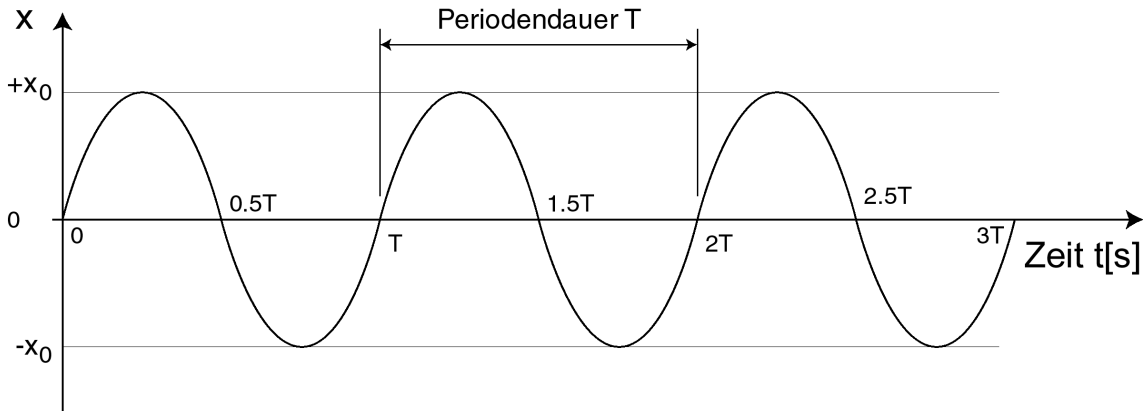

Abbildung 1.4: Eine harmonische Schwingung mit Phasenverschiebung 0

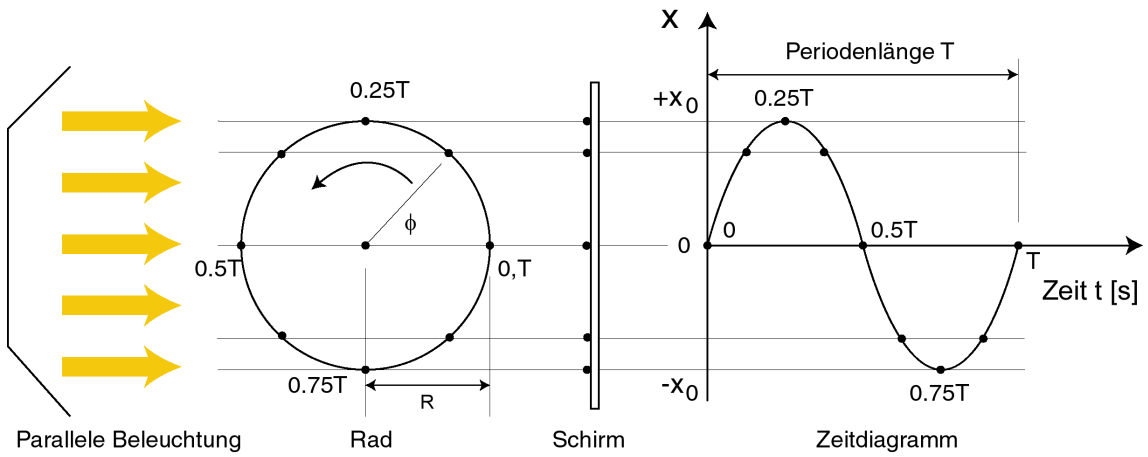

Abbildung 1.5: Die Projektion einer gleichmäßigen Kreisbewegung führt ebenfalls zu einer harmonischen Schwingung

Phase ξ im Winkelmaß	Phase ξ im Bogenmaß [Radiant]	$sin(\xi)$
0°	0	0
90°	$\frac{1}{2}\pi$	1
180°	π	0
270°	$\frac{3}{2}\pi$	-1
360°	2π	0

Wiederholung: Die Werte der Sinusfunktion

1.3 Wellen

Wellen entstehen immer dann, wenn eine Schwingung sich räumlich ausbreitet. Ein Beispiel dafür wäre ein Schwimmer, der auf einer Wasseroberfläche eine harmonische Schwin-

gung senkrecht ausführt, wie es in Abbildung 1.6 gezeigt ist.

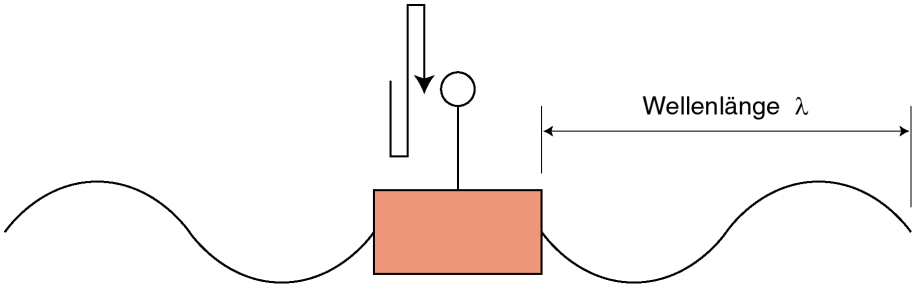

Abbildung 1.6: Ein auf und ab schwingender Schwimmer erzeugt Wasserwellen.

Da im Verlauf einer Periodendauer genau eine vollständige Welle erzeugt wird, errechnet sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit v zu:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \tag{1.5}$$

Bei der Formulierung der Wellengleichung müssen wir bedenken, dass es nun zwei Abhängigkeiten der veränderlichen Größe gibt:

- vom Beobachtungsort
- von der Beobachtungszeit

Die Wellengleichung muss beides wiedergeben und lautet für eine nach rechts wandernde Welle bei Phase 0:

$$x = x_0 \sin(kx - \omega t) \tag{1.6}$$

Wobei die *Wellenzahl* $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ist.

1.4 Elektromagnetische Wellen

1.4.1 Entstehung und Ausbreitung

Wir rufen uns noch einmal das Induktionsgesetz in Erinnerung: In einer geschlossenen Leiterschleife L ruft ein veränderlicher Magnetischer Fluss, der gleich dem Flächenintegral über B in der Fläche A innerhalb der Leiterschleife ist, eine elektrische Ringspannung hervor. Diese kann berechnet werden, indem man die elektrische Feldstärke entlang der

Leiterschleife L als Linienintegral berechnet. In integraler Form lautet das Induktionsgesetz also:

$$\oint_L \vec{E}\vec{dl} = -\frac{d}{dt}\int_A B\cos\theta dA \tag{1.7}$$

Zweitens rufen wir uns das Amperesche Gesetz in Erinnerung: Es sagt aus, dass ein Strom I von einem Ringförmigen Magnetfeld $\vec{B}$ umgeben ist. Das Linienintegral über das Magnetfeld B entlang einer beliebigen geschlossenen Kurve K ist durch $\mu_0 I$ gegeben. Maxwell fand heraus, dass nicht nur ein Strom sondern auch ein veränderliches elektrisches Felde $\vec{E}$ ein solches Magnetfeld erzeugt. Dieser Term ist der so genannte Maxwellsche Verschiebungsstrom:

$$I_V = \epsilon_0 \frac{d}{dt}\int_A E\cos\theta dA \tag{1.8}$$

Das Amperesche Gesetz muss also beide Anteile berücksichtigen und lautet in integraler Formulierung:

$$\oint_L \vec{B}\vec{dl} = \mu_0(I + I_V) = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\int_A E\cos\theta dA \tag{1.9}$$

Die beiden Gleichungen 1.7 und 1.9 sind die beiden letzten der vier Maxwellschen Gleichungen. Betrachten wir nun als Sonderfall die beiden Gesetze in Abwesenheit von Materie. Dann können elektrische Feld und Magnetfeld noch bestehen weil sie auch im Vakuum existieren. Einen Strom I kann es dann aber nicht mehr geben. Das Induktionsgesetz und das Amperesche Gesetz lauten dann:

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{E}\vec{dl} &= -\frac{d}{dt}\int_A B\cos\theta dA \\ \oint_L \vec{B}\vec{dl} &= \mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\int_A E\cos\theta dA \end{aligned} \tag{1.10}$$

Diese beiden Gleichungen weisen eine sehr schöne Symmetrie auf. Wir sehen daran:

- Ein veränderliches Magnetfeld erzeugt ein elektrisches Feld
- Ein veränderliches elektrisches Feld erzeugt ein Magnetfeld

Ist es nun möglich beide Gesetze in einem einzigen Effekt zu kombinieren? Könnte man es so einrichten, dass ein veränderliches Magnetfeld ein veränderliches elektrische Feld erzeugt, das wiederum ein veränderliches Magnetfeld erzeugt, so dass dieser Vorgang sich endlos fortsetzt? Die Antwort ist ja! Man kann auf mathematischem Weg zeigen, dass dies möglich ist. Die Kombination der beiden Gleichungen führt auf eine Wellengleichung. Die Lösungen dafür sind die *elektromagnetischen Wellen*. Sie haben folgende Eigenschaften:

- Elektromagnetische Wellen brauchen kein Ausbreitungsmedium, sie können sich im Vakuum ausbreiten.
- Elektromagnetische Wellen sind Transversalwellen, der elektrische und der magnetische Feldvektor stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.
- Der elektrische und der magnetische Feldvektor stehen senkrecht zueinander.
- Das elektrische und der magnetische feld sind in Phase, d.h. sie haben am gleichen Punkt ihre Maxima.
- Sowohl das elektrische Feld als auch das magnetische Feld sind harmonische Wellen, also fortschreitende hamronische Schwingungen im Raum

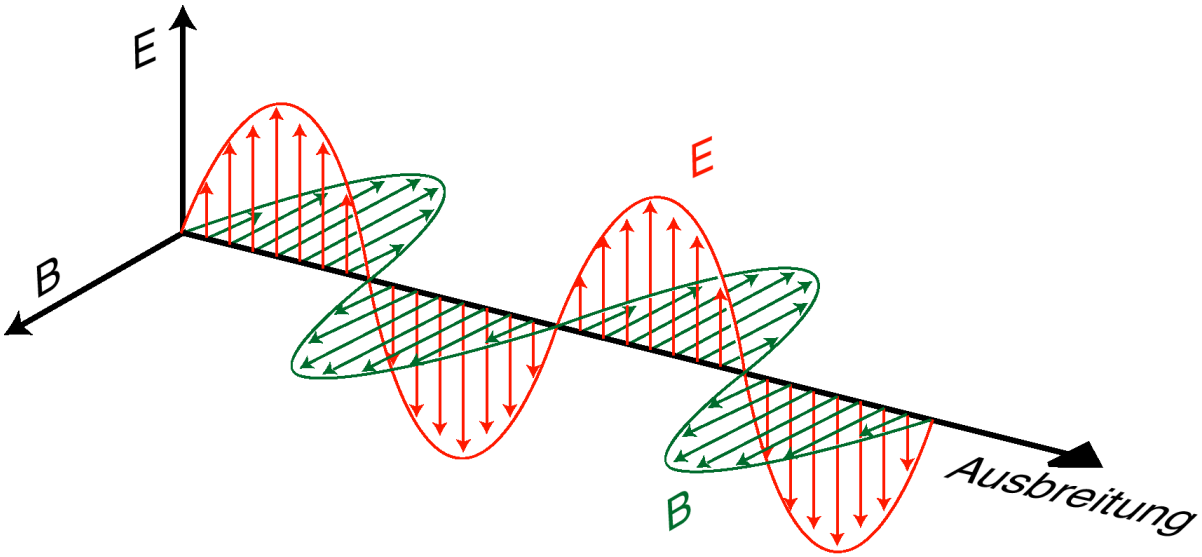

Abbildung 1.7: Die Feldvektoren in einer ebenen elektromagnetischen Welle

Für die Felder in einer ebenen elektromagnetischen Welle, die sich in x-Richtung ausbreitet, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{B}_0 \sin(\omega t - kx) \\ \vec{E} &= \vec{E}_0 \sin(\omega t - kx) \end{aligned} \tag{1.11}$$

Damit entspricht diese Welle exakt der allgemeinen Wellengleichung 1.4. Die Vektoren $\vec{B}_0$ und $\vec{E}_0$ stehen senkrecht zueinander. Wie man sieht bleibt bei dieser Art der Ausbreitung das elektrische und das magnetische Feld in einer Ebene, man spricht von *linearer Polarisation*. Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen gilt:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}} \tag{1.12}$$

Da im Vakuum $\epsilon = \mu = 0$ ist ergibt sich hier:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \tag{1.13}$$

Die Lichtgeschwindigkeit ergibt sich also aus den beiden Naturkonstanten, die für die Elektrizitätslehre bzw. den Magnetismus die größte Bedeutung haben. Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist:

$$c = 299792458 m/s \tag{1.14}$$

Der Zusammenhang zwischen Ausbreitungsgeschwindigkeit, Wellenlänge und Frequenz (Gl.1.5) lautet hier

$$c = \lambda f \tag{1.15}$$

Elektromagnetische Wellen wurden erstmals im Jahre 1887 von *Heinrich Hertz* künstlich erzeugt. Hertz verwendete einen Dipol (ein „Zweipol“, eine Antenne) in dem er Ladungen zu einer hochfrequenten Schwingung anregte. Es handelte sich also um die erste Aussendung von Radiowellen. Die Entstehung der Dipolstrahlung ist in Abbildung 1.8 dargestellt. Erklärung: 1. Phase: Im oberen Teil sind positive Ladungen angesammelt, im unteren Teil negative; von dem Dipol geht ein elektrisches Feld aus. 2. Phase: Die Ladungen gleichen sich aus und erzeugen dabei einen Strom; der fließende Strom erzeugt ein magnetisches Feld, das den Dipol ringförmig umschließt. 3. Phase: Nachdem der Strom lange genug geflossen ist bilden sich positive Ladungen im unteren Bereich und negative im oberen Bereich, der Strom kommt zum Stillstand; von dem Dipol geht jetzt ein elektrisches Feld aus, das umgekehrt orientiert ist wie in der ersten Phase. 4. Phase: Es fließt wieder ein Strom, diesmal von unten nach oben; er erzeugt ein Magnetfeld, das umgekehrt orientiert ist wie in Phase 2. Anschließend geht es bei Phase 1 weiter und dann wiederholt sich der Vorgang periodisch. Alle vom Dipol erzeugten Felder haben eine sinusförmige Zeitabhängigkeit, weil die Schwingung der Ladung harmonisch ist. Diese Felder induzieren sich daher gegenseitig und bilden eine elektromagnetische Welle, die sich vom Dipol ablöst. Bei einem Sender in praktischer Ausführung muss die Dipolschwingung durch einen elektrischen Oszillator mit Verstärkerausgang angeregt werden.

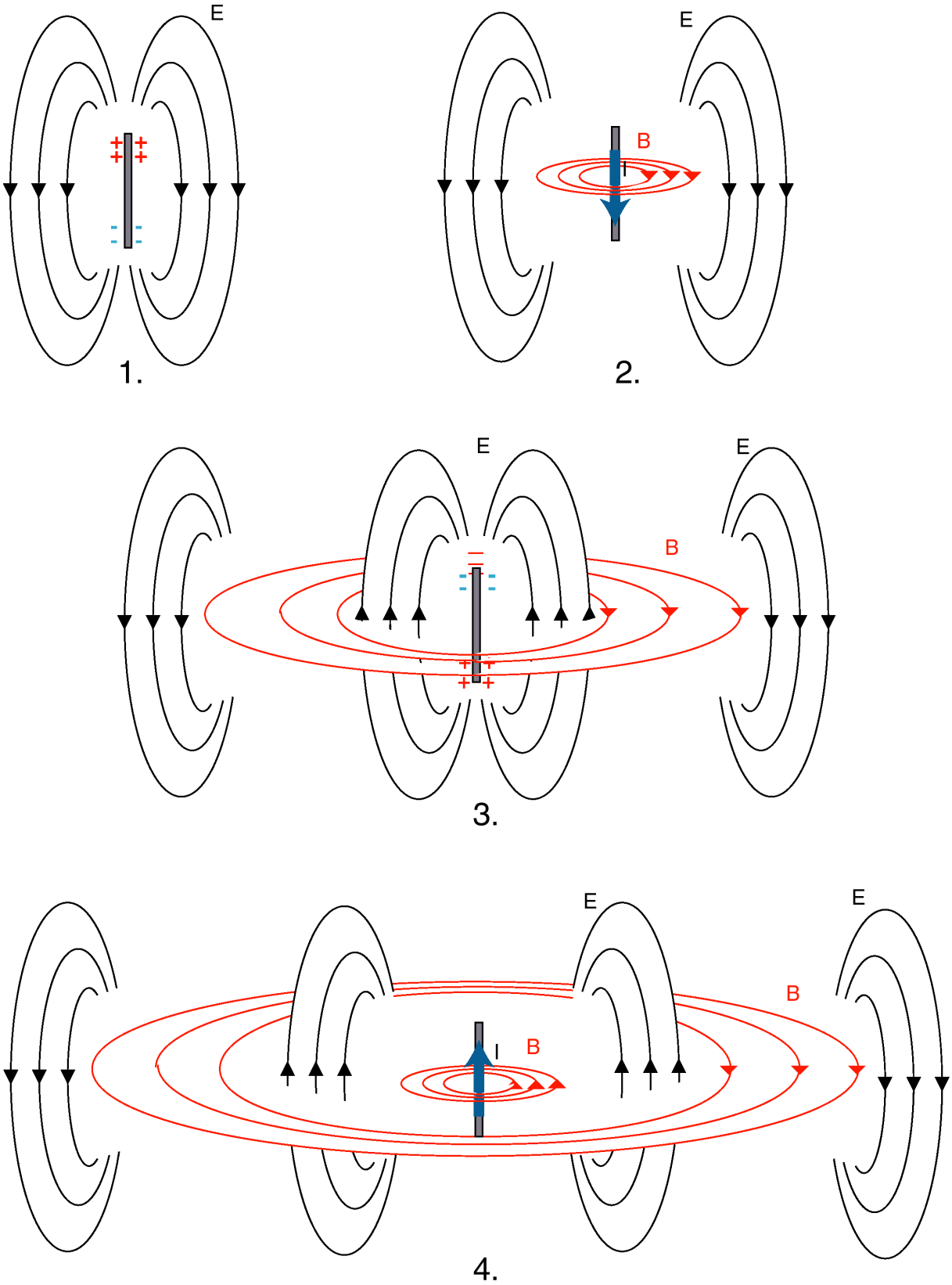

Abbildung 1.8: Ein elektrischer Dipol erzeugt elektromagnetische Strahlung

1.4.2 Das Spektrum der elektromagnetischen Wellen

In der Natur gab es aber schon immer elektromagnetische Wellen. Sie stellen ein einzigartiges Phänomen dar, schon weil sich die beobachtbaren Wellenlängen bzw. Frequenzen über einen Bereich von mehr als 20 Zehnerpotenzen erstrecken! So gibt es Gammastrahlung mit Frequenzen von 10^{23} Hertz und mehr, die langwelligsten Radiowellen dagegen haben nur 10 Hertz. In Abb.1.9 ist das elektromagnetische Spektrum dargestellt.

Gammastrahlung stammt aus dem Atomkern bzw. Weltraum,

Röntgenstrahlung entsteht bei starker Abbremsung von Elektronen und durchdringt Materie,

Ultraviolettstrahlung ist energiereiche Strahlung meist aus der Elektronenhülle,

sichtbares Licht hat Wellenlängen von 380 – 780 nm, stammt aus der Elektronenhülle,

Infrarotstrahlung wird von allen warmen Körpern ausgestrahlt,

Mikrowellen werden stark von Wassermolekülen absorbiert und zur Erwärmung ausgenutzt,

Radiowellen werden durch Ströme in Antennen erzeugt.

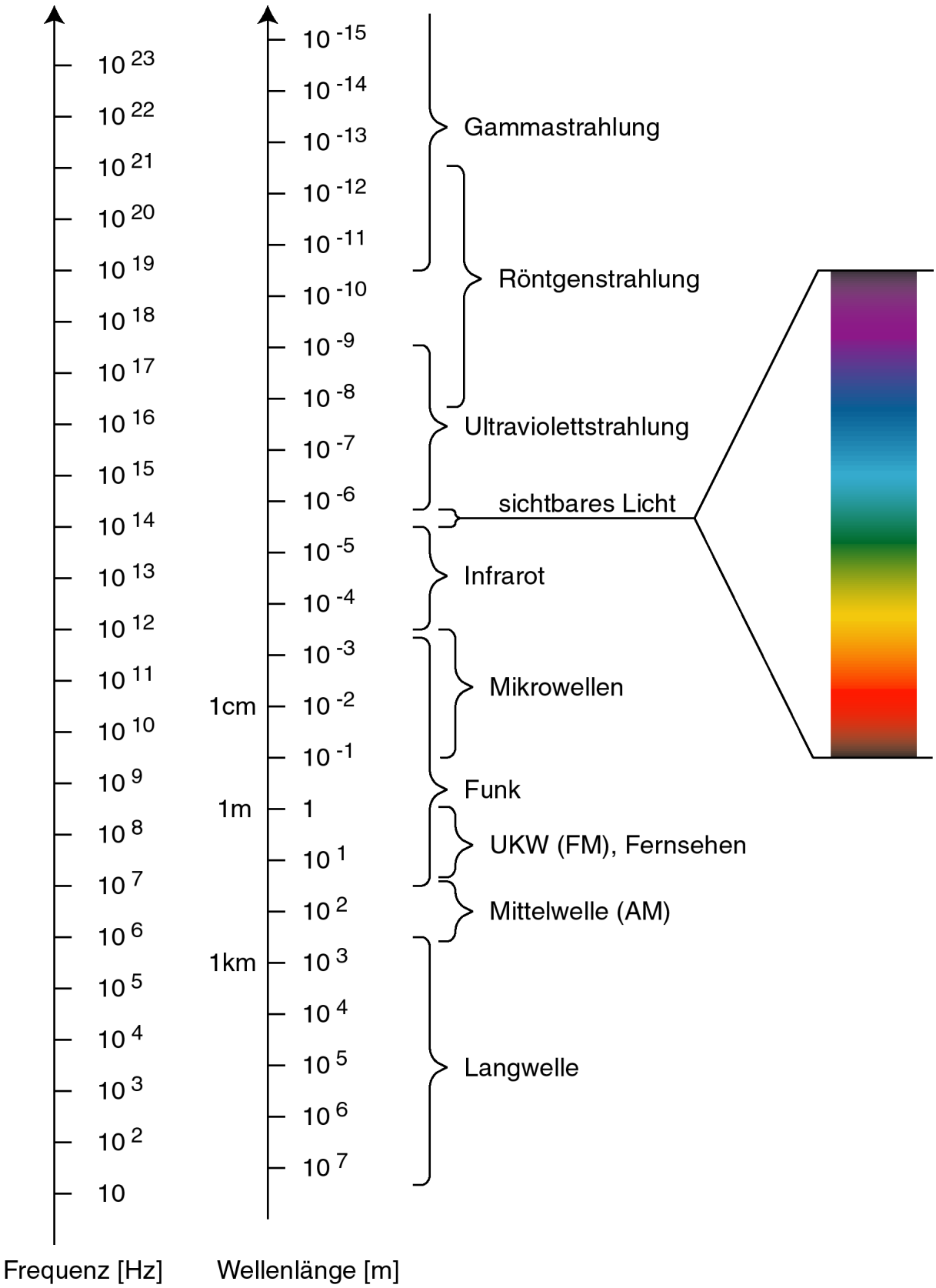

Abbildung 1.9: Das elektromagnetische Wellenspektrum

Kapitel 2

Nachrichtenübertragung

Die Nachrichtentechnik ist ein weites Feld, wir behandeln hier nur einige wenige Aspekte, vor allem die Modulationsverfahren. Diese sind für die Informatik besonders interessant, weil sie praktisch in jedem Informationsübermittlungsverfahren genutzt werden.

Die Modulationsverfahren treten je nach Situation in verschiedenen Varianten auf: 1. Eine Übertragung oder Speicherung unter direkter Manipulation des Mediums. Dabei kommt außer der Signalfrequenz keine weitere Frequenz ins Spiel. Man spricht deshalb von *Basisbandmodulation*. Beispiele dafür sind die elektrischen Bussysteme, die Speicherung auf magnetischen Medien, CDs, DVD und andere.
2. Funkübertragung oder Lichtleiter: Trägerwellen müssen benutzt werden um Informationen „Huckepack“ zu übertragen. Es gibt also außer der Signalfrequenz noch die Trägerfrequenz der „Transportwellen“ die moduliert werden. Gerade bei Wellen bieten sich besonders reichhaltige Möglichkeiten der Modulation.

2.1 Basisbandmodulation

Die Basisbandmodulation beeinflusst physikalische Größen direkt. Das kann im analogen oder digitalen Bereich geschehen. Wir legen den Fokus auf letzteren.

2.1.1 Analoge Basisbandmodulation

Beispiel: Signal eines PT100-Temperaturfühlers. Der elektrische Widerstand des Fühlers ist temperaturabhängig und dies wird zur Messung der Temperatur ausgenutzt. Es gilt:

$$\begin{aligned} R &= R_0(1 + aT) \\ a &= 3.85 \cdot 10^{-3} 1/^oC \\ R_0 &= 100\Omega \end{aligned} \tag{2.1}$$

So ergibt sich z.B. für 0^oC ein Widerstand von 100.00 Ω, für 10^oC ergibt sich 103.85 Ω un dso weiter. Zu jeder Temperatur ergibt sich ein entsprechendes Signal (Widerstandswert), die Signale liegen zeit- und wertkontinuierlich und werden durch eine analoge Elektronik ausgewertet. Analoge Signale übertragen Sörungen aller Art.

2.1.2 Digitale Basisbandmodulation

Direkte Digitale Modulation (direkte Beeinflussung) einer einfachen physikalischen Größe, meist zwei Niveaus: (Hinweis: Rauchzeichen der Indianer)

- Spannung z.B. Bussysteme, RS232, CAN-Bus, synchrone serielle Busse
- Strom z.B. RS485
- Magnetisierung auf Diskette, Festplatte, Magnetband
- Höhenniveaus (CD/DVD)

Non Return to Zero-Code (Einfache Binärcodierung)

NRZ-Signal (Non-Return-to-Zero) sind Signale, die nicht zwingend regelmäßig auf auf Nullpotential zurückfallen. Ein NRZ-Signal besteht daher einfach aus den reinen binär codierten Nutzdaten. Anders: RZ-Signal. NRZ-Codes sind die einfachsten Leitungscodes in der digitalen Übertragungstechnik.

Anwendungsbeispiel: RS232

NRZ-I (Non Return to Zero Invers)

Hier wird wie folgt codiert: Beim Übertragen einer logischen 0 wird der Leitungszustand beibehalten, beim Übertragen einer logischen 1 wird der Leitungszustand verändert.

Beispiel 1:
Datenbits (logisch): 1 1 1 1 1 1 1 1
phys. Leitung bei Ausgangszustand "1": 0 1 0 1 0 1 0 1
phys. Leitung bei Ausgangszustand "0": 1 0 1 0 1 0 1 0

Beispiel 2:
Datenbits (logisch): 0 0 0 0 0 0 0 0
phys. Leitung bei Ausgangszustand "1": 1 1 1 1 1 1 1 1
phys. Leitung bei Ausgangszustand "0": 0 0 0 0 0 0 0 0

Beispiel 3:
Datenbits (logisch): 1 1 1 1 0 0 1 0 1 0 1
phys. Leitung bei Ausgangszustand "1": 0 1 0 1 1 1 0 0 1 1 0
phys. Leitung bei Ausgangszustand "0": 1 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1

Problem: Synchronisierung. Zusätzliches Taktsignal erforderlich.

Anwendung: USB, MFM (Festplatten)

Ein RZ-Code: Manchester-Code

Die Bits werden als Flanken (Pegelwechsel) codiert. Es kann vereinbart werden:

Fallende Flanke = 1
Steigende Flanke = 0

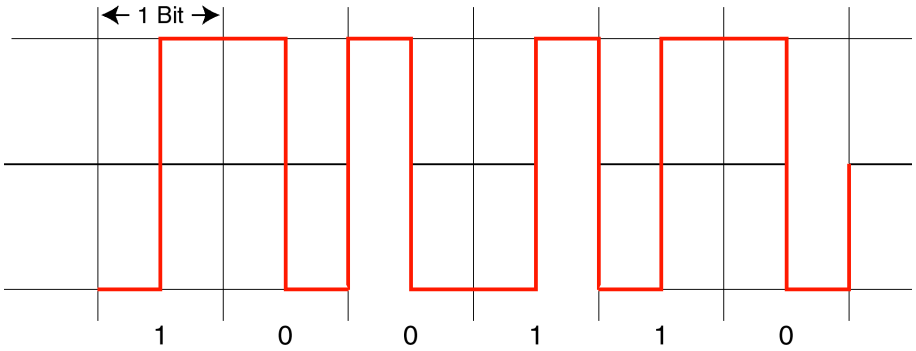

Abbildung 2.1: Manchester-Codierung

oder umgekehrt. Jeder Takt enthält die Flanke in der Mitte des Taktes, so dass in absolut gleichmäßigen Abständen eine Flanke erfolgt; diese kann zur Synchronisation verwendet werden., es ist kein Taktsignal notwendig. (selbstsynchronisierender Code) Am Anfang der Übertragung steht immer eine Präambel um die richtige Bitzuordnung zu sichern. Anwendung: Ethernet

2.2 Einschub: Bandbreite und Datenrate

Jeder reale Übertragunsgkanal hat nur ein begrenztes Frequenzband, auf dem eine Übertragung erfolgen kann. Die Bandbreite B ist als Differenz zwischen der oberen und der unteren Grenzfrequenz gegeben.

$$B = f_2 - f_1$$

Die Begrenzung des Bandes kann auf Grund der physikalischen Eigenschaften erfolgen, d.h. durch Dämpfung, RC-Zeiten und ähnliches. Die Grenzfrequenzen können durch einen bestimmten Abfall der Amplitude festgelegt werden (z.B. 3dB). Sie kann aber auch technisch herbeigeführt sein, um ein größeres Band in Kanäle aufzuteilen, z.B. im Rundfunk.

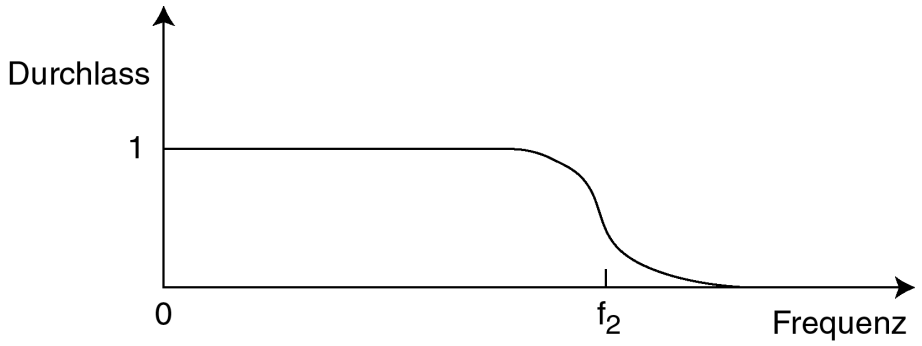

Abbildung 2.2: Die Bandbreite eines Übertragungsmediums ist durch die physikalischen Eigenschaften begrenzt. Hier ist $B = f_2$

Oft ist die BAndbreite auch durch technische Maßnahmen begrenzt, z. B. wenn mehrere Kanäle auf einem Medium untergeracht sind. Dann wird die Gesamtbandbreite aufgeteilt in Bänder. Ein Beispiel dafür wäre der Rundfunk.

Beispiel: f_1=120,3 kHz, f_2=129,3 kHz, Bandbreite 9 kHz (Mittelwellesender).

Wie viel Information kann in einem Übertragungskanal der Bandbreite B übertragen werden? Einfache Vorstellung: Schnellst möglicher Wechsel der Datenbits bei NRZ (010101...) erfordert die höchste Frequenz des Bandes, also kann z.B. auf einem Medium mit 10 kHz Bandbreite eine Datenrate von 20 kBit/sec erreicht werden.

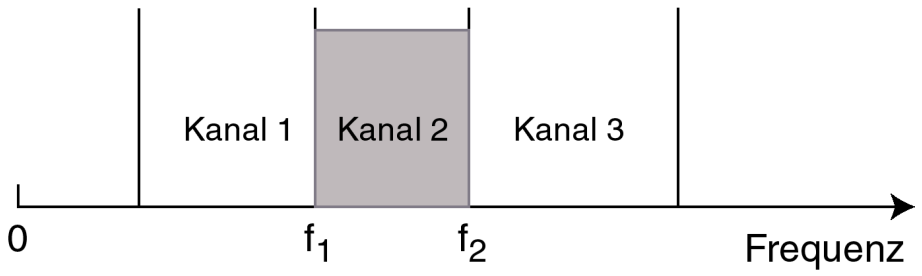

Abbildung 2.3: Die Gesamtbandbreite eines Übertragungsmediums wird oft durch technische Maßnahmen in mehrere Bänder aufgeteilt. Jedes Band steht dann für einen Kanal zur Verfügung. Kanal 1 hat die Bandbreite $B = f_2 - f_1$

Es gilt also:

$$S = 2B \tag{2.2}$$

Dabei ist S die Schrittgeschwindigkeit, d.h. die Anzahl der Signaltakte pro Sekunde (auch Baudrate oder Symbolrate).

Wenn pro Schritt ein Bit übertragen wird, ist die Datenrate gleich der Schrittgeschwindigkeit. Im obigen Beispiel also 20000 Schritte/s und 20000 Bit/s. Aber: Die Manchester-Codierun braucht gegenüber einfachem NRZ-Code die doppelte Bandbreite, weil zwei Impulse pro Bit kommen. Könnten wir nicht die Datenrate erhöhen, um mehrere Bit pro Signaltakt zu übertragen? Ja, man kann:

Zum Beispiel kann man mit 4 Levels (Leitungszuständen) je zwei Bit pro Signaltakt übertragen, mit 8 Levels schon 3 Bit (z.B. 8PSK) und so weiter. Wir müssen also unterscheiden: Die Anzahl A Datenbits pro Signaltakt beträgt bei L Leitungszuständen:

$$A = \log_2(L) \tag{2.3}$$

Da die Datenübertragungsrate gleich der Schrittgeschwindigkeit mal Datenbits/Signaltakt ist ergibt sich das Gesetz von Nyquist:

$$D = 2BA = 2B\log_2(L) \tag{2.4}$$

D=Datenrate (Bit/s)
B=Bandbreite
L=Anzahl der Leitungszustände (Levels)

Damit lässt sich das obige Beispiel nachrechnen. Nun könnte man auf die Idee kommen, sehr viele Leitungszustände einzuführen um die Datenrate zu steigern. Das geht nur theoretisch, denn auf realen Leitungen gibt es immer ein Rauschen. Durch das Rauschen könnte der Abstand zum nächsten Leitungszustand überbrückt werden oder doch zumindest ein Signal in den verbotenen Bereich zwischen den Zuständen gelangen und somit ein Bitfehler entstehen. Die Ursachen für Rauschen sind vielfältig: Elektrostatische Einkopplung, Induktive Einkopplung. Die Anzahl der möglichen Leitungszustände ist daher begrenzt.

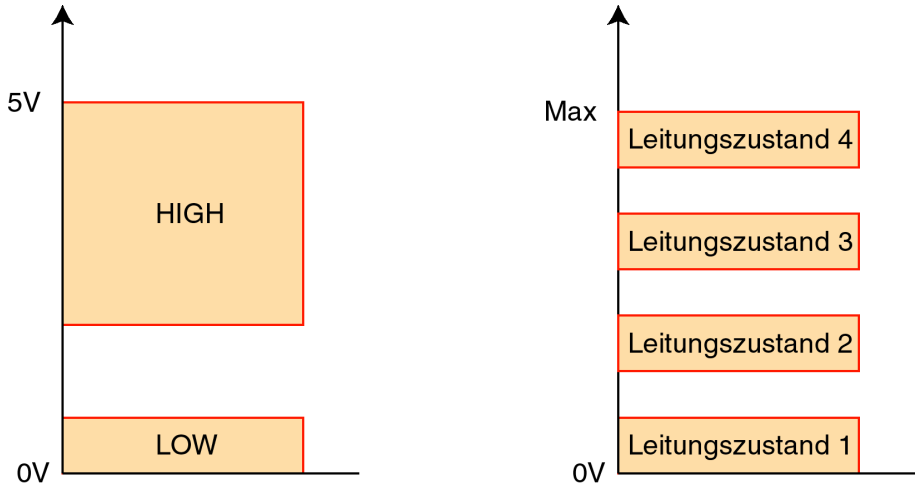

Abbildung 2.4: Übertragungsmedien mit zwei Leitungszuständen (links) und vier Leitungszuständen (rechts).

Claude Shannon berücksichtigte, dass durch das Signal/Rausch-Verhältnis die Anzahl der möglichen Pegel begrenzt ist und verallgemeinerte das Theorem von Nyquist zum *Shannon-Hartley-Gesetz*:

$$D = B \log_2(1 + S/N) \tag{2.5}$$

C = effektive Datenübertragungsrate in Bit/s
S = effektive Signalleistung
N = effektive Rauschleistung

Beispiel: Über eine Leitung mit dem Signal-Rausch-Abstand von 20 dB lassen sich bei einer verfügbaren Bandbreite von 3000 Hz demnach maximal 20 kBit/s übertragen:

$$D = 3000Hz \cdot \log_2(1 + 10^2) = 3000Hz \cdot \log_2(101) = 3000Hz \cdot 6.66 = 20kBit/s$$

Beispiele:

- GSM-Handy: 9,6 kbit/s
- IrDA 1.0 (=Infrarotschnittstelle): 9.6 kbit/s bis 115 kbit/s
- ISDN: 64 kbit/s
- WLAN: 10 bis 108 Mbit/s, typisch 54 MBit/s

Beispiel für Bandbreitenaufteilung: Asymmetric Digital Subscriber Line (ADSL)

ADSL ist eine Technik, die einen Breitband-Internetzugang (breites Band = hohe Datenrate!) über herkömmliche Kupferanschlussleitungen ermöglicht. Gleichzeitig soll ein bestehendes analoges Telefon und bestehendes ISDN weitergeführt werden. ADSL arbeitet mit sehr ausgefeilten Techniken (Frequenzmultiplexverfahren, Fouriertransformation und Discrete Multitone Transmission (DMT) Die Bandbreite muss ca. 1,1 MHz sein, was nur bei kurzen Leitungen erreicht wird. Aus dieser Historie heraus sind also mehrere Frequenzbänder auf der Gesamtbandbreite von DSL untergebracht, die durch Frequenzsplitter getrennt werden:

0 - 4 kHz	Analoge Telefonie (POTS)
4 - 138 kHz	ISDN 130 kHz Bandbreite
138 – 276 kHz:	Upload, 138 kHz Bandbreite, Datenrate 128 kBit/s,(32 mal 4 kBit/s)
276 – 1104 kHz:	Download, 828 kHz Bandbreite, Datenrate 768 kBit/s,(192 mal 4 kBit/s)

2.3 Modulation von Trägerwellen

Nehmen wir einmal an, wir wollten Musik über eine Antenne ausstrahlen. Man könnte naiv versuchen, den Radioton zu verstärken und auf eine senkrecht stehende Antenne zu geben. Aus der Elektrodynamik ergibt sich allerdings, dass eine Antenne am besten abstrahlt, wenn ihre Höhe halb so groß ist wie die abzustrahlende Wellenlänge. Ein Ton am unteren Ende des Spektrums mit einer Tonhöhe von 20 Hz hat eine Wellenlänge von

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 m/s}{20 s^{-1}} = 15000\, km$$

Für eine optimale Abstrahlung müsste die Antenne also eine Höhe von 7500 km haben, was natürlich nicht zu realisieren ist. Bleibt man unter dieser Höhe, so ist Wirkungsgrad der Antenne ([2])

$$\eta = \frac{8h^3}{\lambda^3} \tag{2.6}$$

Bei einer Höhe von 300 m beträgt demnach der Wirkungsgrad noch $8 \cdot 10^{-15}$. es kommt also so gut wie keine Leistung an. Außerdem würde die Abstrahlung bei dieser Methode sehr stark von der Wellenlänge abhängen, hohe Frequenzen würden um ein Vielfaches stärker als niedrige abgestrahlt. So geht es also nicht. Erst recht nicht bei einem Handy! Man muss also Wellen benutzen, die sich von ihrer Wellenlänge her gut auf den verfügbaren Antennen abstrahlen lassen.

Bsp. GSM (Global System for Mobile Communication) übermittelt die (digitalen) Daten mit Gehäuseantennen von ca. h=10 cm. Welche Frequenz muss mindestens benutzt werden? Wir nehmen an, dass die Abstrahlung mit $\lambda/4$ wegen der nahen GSM-Stationen ausreicht.

Es ist also $\lambda = 4h$ und somit $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{4d} = \frac{3 \cdot 10^8 m/s}{4 \cdot 0.1 m/s} = 750 MHz$ In Europa wird das 900 Mhz-Band und das 1800 MHz-Band genutzt.

Es soll nun besprochen werden, welche Möglichkeiten es gibt, Informationen (das heißt Signale) auf Wellen aufzumodulieren. Dabei unterscheidet man ob analoge Signale oder digitale Signale aufmoduliert werden. Bei Wellen bieten sich folgende physikalische Größen für eine Modulation an:

1. Amplitude
2. Frequenz
3. Phase

Alle drei Möglichkeiten werden sowohl zur Modulation mit analogen als auch digitalen Signalen genutzt.

2.3.1 Modulation mit analogen Signalen

Amplitudenmodulation

Klassische Modulationsart, bei der die Amplitude der Trägerwelle im Takt des Signals größer und kleiner wird. Wir zeigen das Vorgehen am Beispiel einer Trägerwelle

$$s_T(t) = \hat{s}_T \cos(\omega_T t)$$

auf die ein modulierendes Signal (Nutzsignal) wirkt:

$$s_M(t) = \hat{s}_M \cos(\omega_M t)$$

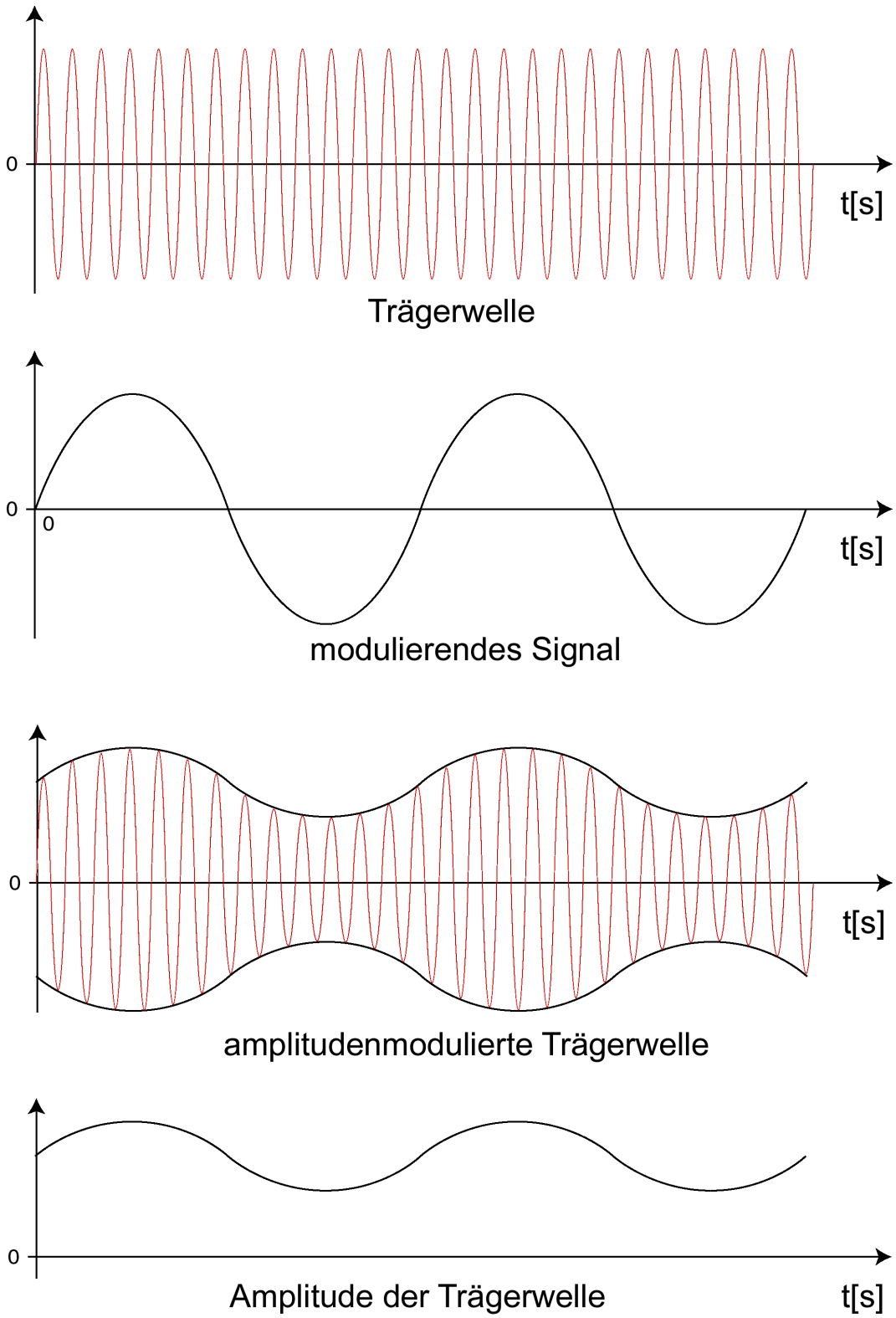

Abbildung 2.5: Amplitudenmodulation.

Man wählt man eine mittlere Amplitude für die Ausstrahlung der Trägerwelle $\hat{s}_T$. Dazu addiert man elektronisch das aufzumodulierende Signal $s_M(t)$ und erhält:

$$\hat{s}_T + \hat{s}_M \cos(\omega_M t)$$

Dabei muss $\hat{s}_T > \hat{s}_M$ sein, damit später die Trägerwelle niemals bis auf Null abgeschwächt wird. Dieses Signal multipliziert man auf die Trägerfrequenz auf und erhält das amplitudenmodulierte Signal:

$$\begin{aligned} s_{AM}(t) &= (\hat{s}_T + \hat{s}_M \cos(\omega_M t)) \cos(\omega_T t) \\ &= \hat{s}_T \cos(\omega_T t) + \hat{s}_M \cos(\omega_M t) \cos(\omega_T t) \end{aligned}$$

Für das Produkt zweier Cosinus-Werte verwenden wir die elementare Formel

$$\cos\alpha \cos\beta = 1/2[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

Damit erhält man:

$$s_{AM}(t) = \hat{s}_T \cos(\omega_T t) + \frac{1}{2}\hat{s}_M[\cos(\omega_T t - \omega_M t) + \cos(\omega_T t + \omega_M t)] \tag{2.7}$$

Dabei ist in Gleichung 2.7 der erste Term das Hauptsignal, der stärkste der drei Terme. Der zweite Term ist das untere Seitenband und der letzte das obere Seitenband. Das aufmodulierte Signal erscheint also in Form zweier Seitenwellen mit den Frequenzen $\pm(\omega_T - \omega_M)$. Diese Situation ist in Bild 2.6 auf der linken Seite dargestellt. In der Praxis

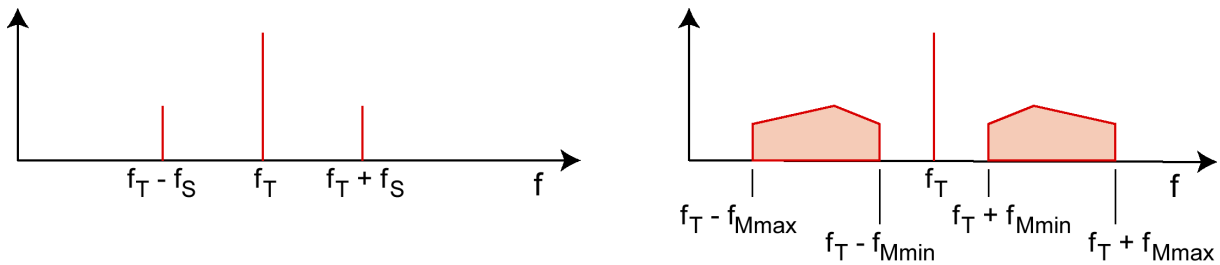

Abbildung 2.6: Amplitudenmodulation.

moduliert man nicht eine einzelne Frequenz sondern ein breites Band von Frequenzen auf. Diese erscheinen dann als zwei symmetrische Seitenbänder, was in Bild 2.6 rechts dargestellt ist. Jedes Seitenband enthält bereits die volle Information, deshalb reicht eines aus. Wenn man also Bandbreite einsparen will unterdrückt man das andere Seitenband (SSB, Single Side Band). Amplitudenmodulation ist die Technik des Rundfunks und Funks auf Kurzwelle, Mittelwelle und Langewelle.

Frequenzmodulation

Bei der Frequenzmodulation bleibt die Amplitude konstant und das modulierende Signal wirkt auf die Frequenz der Trägerwelle. Mit den Bezeichnungen des letzten Abschnitts ergibt sich für das Argument der Winkelfunktion des modulierten Signals:

$$\Omega = \omega_T + \alpha_F \hat{s}_M \cos(\omega_M t) \tag{2.8}$$

Die Frequenz pendelt also mit einem Hub $\alpha_F \hat{s}_M$ um die ursprüngliche Trägerfrequenz. FM wird vom Rundfunk im UKW-Band benutzt und gibt einen sehr guten Ton. In der Messtechnik wird FM als so genannts Wobbeln benutzt, beim SECAM-Fernsehen zur Übertragung der Farbinformation. Ähnlich der Frequenzmodulation wirkt auch die Phasenmodulatation auf das Argument der Winkelfunktion.

2.3.2 Modulation mit digitalen Signalen

Hier kommen die gleichen Modulationsarten zur Anwendung, nur das das modulierende Signal eine endliche Anzahl von Leitungszuständen ausweist, also diskret ist. Die Modulation mit digitalen Signalen heißt auch Tastung oder Umtastung.

Amplitudenumtastung (Amplitude Shift Keying, ASK)

Bei der Amplitudenumtastung wird im Takt des digitalen Modulationssignales die Amplitude der Trägerwelle verkleinert. Zum Beispiel 1=volle Amplitude, 0=30% verringerte Amplitude (Bild 2.8). Eine Anwendung dafür ist die Codierung des DCF-77-Signals, bei dem einmal pro Sekunde die Leistung um 25% reduziert wird. Ein weiteres Beispiel sind die Funkfeuer zur Anpeilung z.B. von Schiffen, die einen Ton im Audio-Bereich auf ihre Sendefrequenz aufmodulieren, welcher selbst wieder mit einer ASK getastet wird.

Frequenzumtastung (Frequency Shift Key)

Bei der Frequenzumtastung wird ein Trägersignal digital frequenzmoduliert. Es gibt also nur noch einige wenige (meist zwei) Leitungszustände, die sich in der Frequenz der Trägerwelle unterscheiden. Ältestes Anwendungsbeispiel ist die Telegraphie, bei der ein Digitalcode durch FSK auf ein akustisches Signal übertragen wird: LOW=1650 Hz, HIGH=1850 Hz. Eine Abwandlung des FSK, bei der die Flanken des modulierenden Signals etwas abgeflacht werden (GMSK, Gaussian Minimum Shift Keying) wird bei GSM, also im Mobilfunk eingesetzt.

Phasenumtastung (Phase Shift Key)

Phasenumtastung ist die digitale Form der Phasenmodulation. Auch hier nur einige wenige Leitungszustände, die sich in der Phase unterscheiden. Üblich sind Verfahren mit 2, 4, 8 oder 16 zuständen, die entsprechend als PSK, 4PSK, 8 PSK oder 16PSK bezeichnet werden.

Eine wichtige Anwendung ist das digitale Satellitenfernsehen, das derzeit mit 4PSK arbeitet und damit 4 Bit pro Signaltakt übertragen kann. Quadrature Phase Shift Keying (QPSK, deutsch: Quadraturphasenumtastung oder auch Vierphasen-Modulation), das 4 Phasenzustände benutzt und damit 4 Bit pro Signaltakt übertragen kann. Es wird z.B. beim Faxgerät eingesetzt wird.

GSM bietet seit der Weiterentwicklung zum E-GPRS eine höhere Datenrate, weil nun eine 8PSK-Codierung mit 3Bit pro Signaltakt benutzt wird.

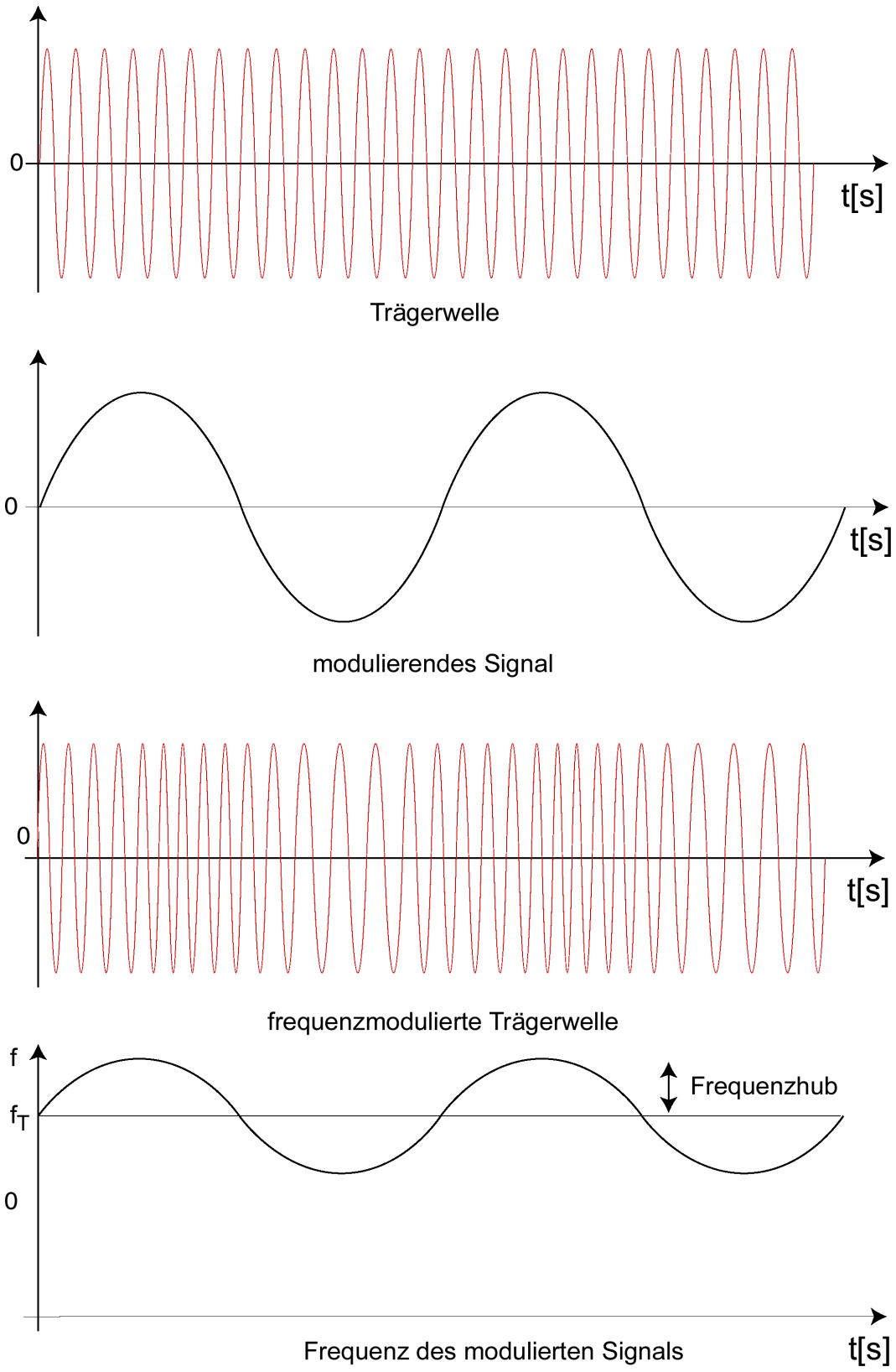

Abbildung 2.7: Frequenzmodulation.

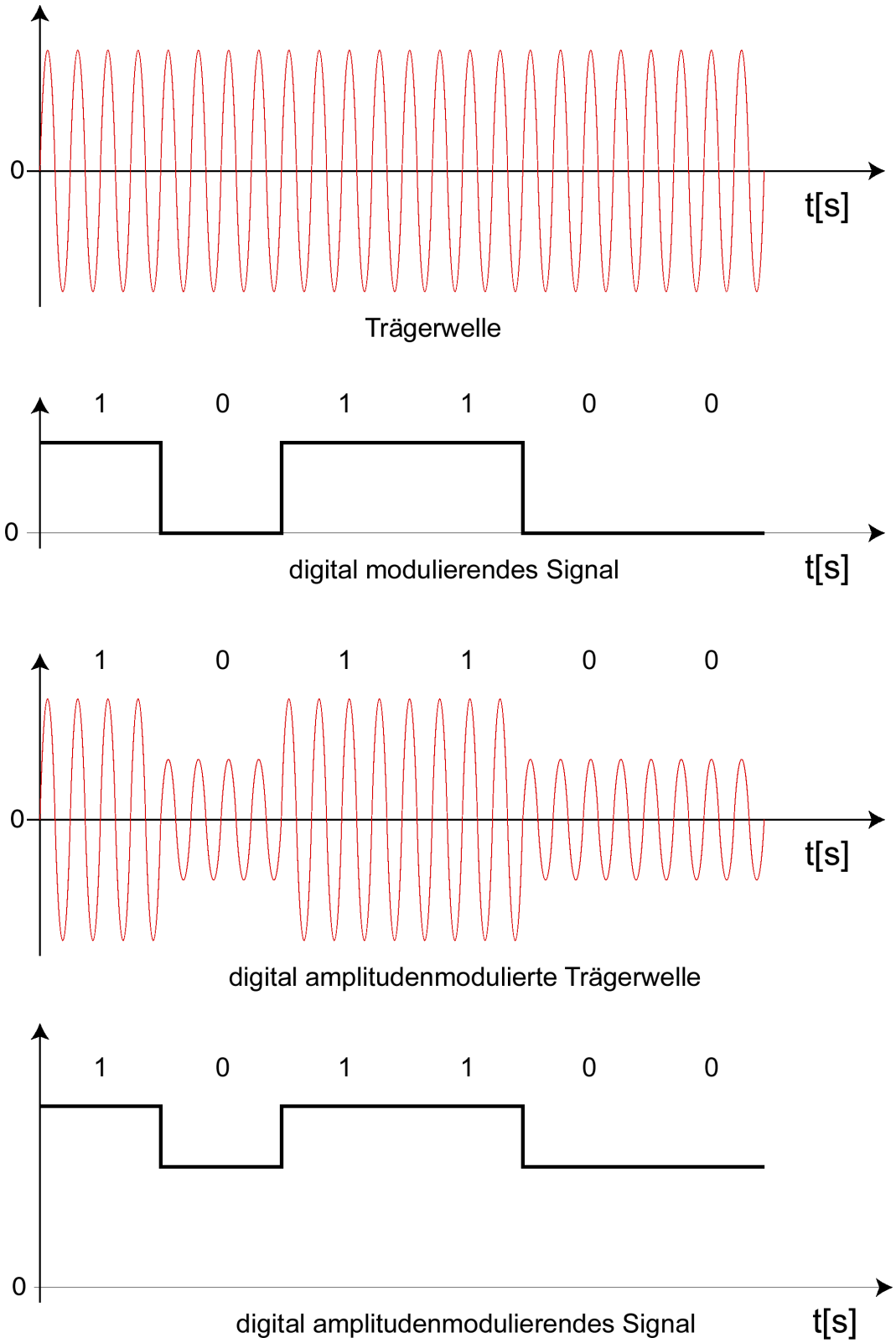

Abbildung 2.8: Amplitudenumtastung.

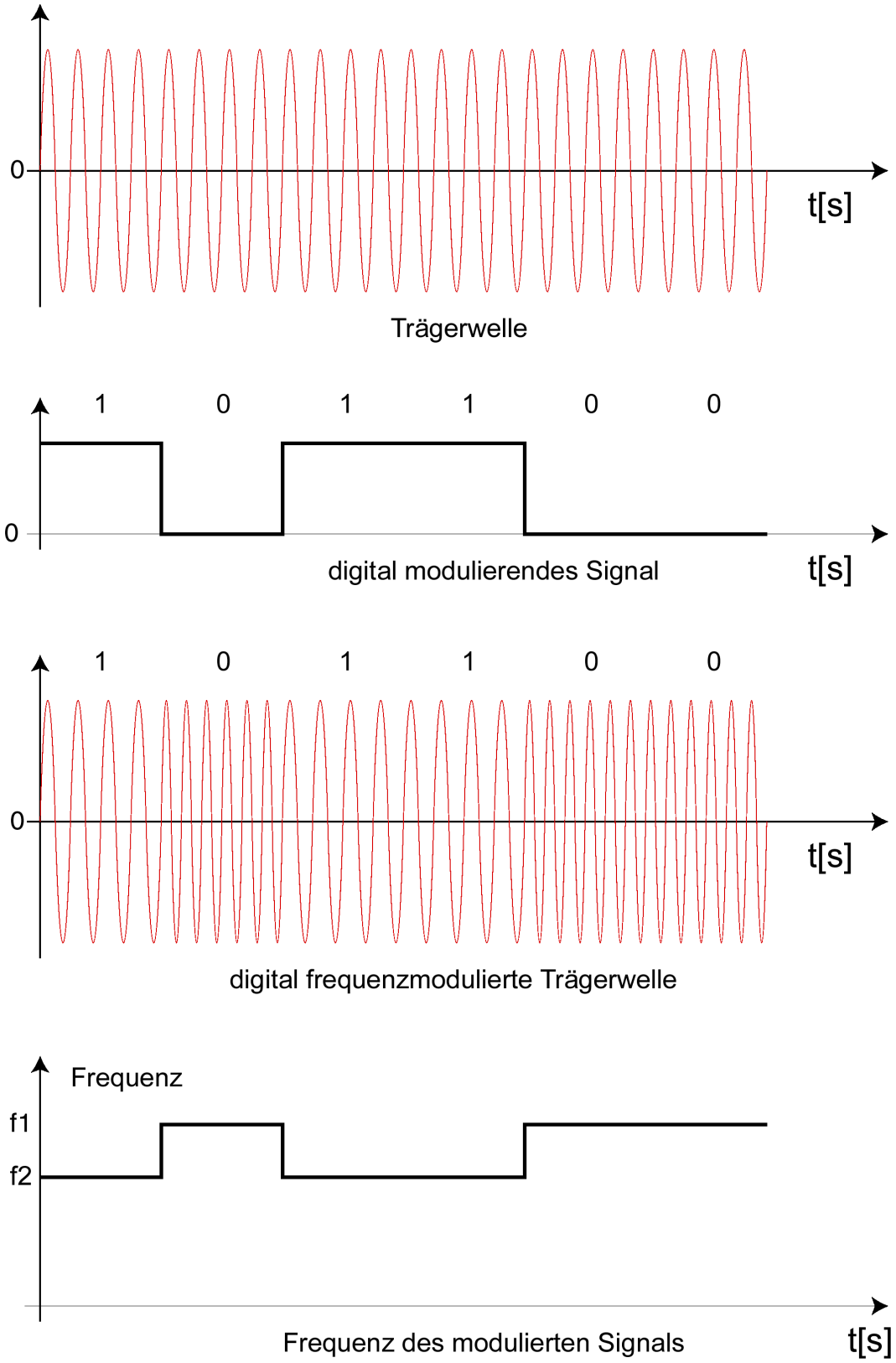

Abbildung 2.9: Frequenzumtastung.

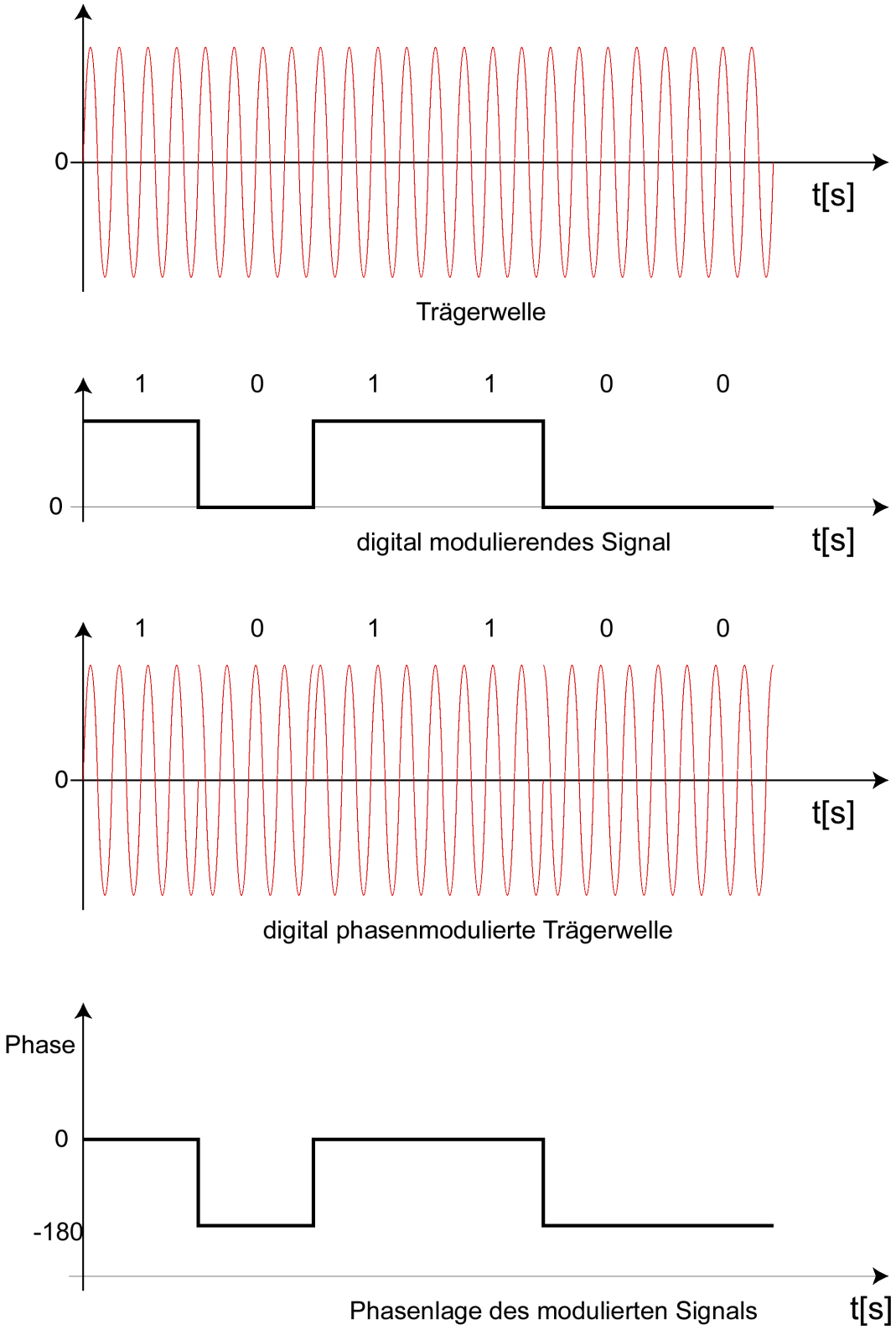

Abbildung 2.10: Phasenumtastung.

Literaturverzeichnis

[1] Tipler, Paul A. *Physik*, Spektrum Lehrbuch

[2] Vogel, H. *Gerthsen Physik*, Springer Verlag, Berlin

[3] Horowitz, P., Hill, W.: *Die hohe Schul der Elektronik* Elektor-Verlag, Aachen

[4] Beuth, K., Hanebuth, R., Kurz, G. *Nachrichtentechnik (Elektronik 7)*, Vogel Buchverlag, Würzburg

[5] Herter, E., Lörcher, W. *Nachrichtentechnik*, Übertragung-Vermittlung-Verarbeitung